WYDZIAŁ MATEMATYKI, INFORMATYKI I EKONOMETRII
UNIWERSYTET ZIELONOGÓRSKI

Anna Góralczyk

WŁASNOŚCI ZBIORU ROZWIĄZAŃ INKLUZJI STOCHASTYCZNYCH TYPU STRATONOWICZA

Rozprawa doktorska napisana pod kierunkiem
dra hab. Jerzego Motyla, prof. UZ

Zielona Góra, 2009

Spis Treści

Wstęp

W XX wieku rozwinęły się dwie teorie zainspirowane teorią równań różniczkowych zwyczajnych. Teoria inkluzji różniczkowych oraz stochastycznych równań różniczkowych. Rozwój tych kierunków związany był z ich zastosowaniami oraz koniecznością tworzenia modeli matematycznych, lepiej opisujących praktyczne problemy.

Rozwój teorii inkluzji różniczkowych zapoczątkowali H. Marchaud w pracy [25] z 1934 oraz S.C. Zaremba w pracy [42] z 1936 roku. Zajmowali się oni istnieniem rozwiązań oraz badaniem własności zbioru rozwiązań tak zwanych równań kontyngensowych i parakontyngensowych. W 1961 roku T. Ważewski w pracy [40] udowodnił, że znalezienie rozwiązania równania kontyngensowego jest równoważne znalezieniu absolutnie ciągłej funkcji $x(\cdot)$, spełniającej prawie wszędzie inkluzję różniczkową $x'(t) \in F(t, x(t))$. Badaniem inkluzji różniczkowych oraz ich własności zajmowali się między innymi J.P. Aubin [2], J.P. Aubin i A. Cellina [3], A.F. Filippov [9], M. Kisielewicz [19], C. Olech [33]. Inkluzje różniczkowe znalazły zastosowania w teorii sterowania, teorii "viability", teorii rynków finansowych, czy w zagadnieniach techniki, w których nie można jednoznacznie opisać występujących w nich wielkości. Są one również wykorzystywane jako narzędzie do badania równań różniczkowych z nieciągłą prawą stroną.

Badania nad teorią stochastycznych równań różniczkowych rozpoczął w połowie XX wieku K. Itô [16, 17]. Równaniami stochastycznymi o różnym stopniu ogólności zajmowali się między innymi G. Da Prato i J. Zabczyk [7], I.I. Gihman [10], I.I. Gihman i A.V. Skorohod [11], Ikeda N. i S. Watanabe [15], B. Øksendal [32], P. Protter [36]. Stochastyczne równania różniczkowe znajdują zastosowania w teorii stabilności, stochastycznego sterowania, teorii gier, a także w ekonomii matematycznej.

Stochastyczne inkluzje różniczkowe stanowią połączenie tych dwóch niezależnie rozwijających się kierunków. W latach dziewięćdziesiątych problemy istnienia i własności rozwiązań stochastycznych inkluzji różniczkowych, głównie inkluzji Itô, były przedmiotem badań między innymi N.U. Ahmeda [1], J.P. Aubina i G. Da Prato [4], M. Kisielewicza [20, 21], M. Kisielewicza, M. Michty i J. Motyla [22], M. Michty [27], J. Motyla [28].

Najczęściej badanym typem stochastycznego równania różniczkowego jest równanie Itô: $dx_t = f(x_t)dt + g(x_t)dW_t$. W 1965 roku E. Wong i M. Zakai wprowadzili w pracy [41] metodę aproksymacji umożliwiającą rozwiązanie równania Itô. Okazało się, że rozwiązania równań aproksymujących równanie Itô nie zbiegają do rozwiązania tego równania, ale do rozwiązania równania Stratonowicza. Równaniami Stratonowicza, przy różnych założeniach i w różnym stopniu ogólności, zajmowali się między innymi P. Protter, E. Pardoux i T.G. Kutrz [23], J.S. San Martin [37], L. Słomiński [38], K.Twardowska [39], E. Wong i M. Zakai [41]. Równanie Itô, ze względu na martyngałowy charakter rozwiązań, znajduje zastosowania przede wszystkim w ekonomii i matematyce finansowej. Natomiast równanie typu Stratonowicza lepiej opisuje zagadnienia techniczne, co jest związane z formułą całkowania przez części, taką jak dla całki Lebesgue'a. Relacje pomiędzy całkami oraz równaniami Itô i Stratonowicza możemy znaleźć w pracach A.L. Dawidowicza i K. Twardowskiej [8], A. Nowak i K. Twardowskiej [31].

Związki pomiędzy równaniami Itô oraz Stratonowicza, a także fakt, iż do tej pory rozważano głównie inkluzje typu Itô stały się motywacją do badania inkluzji typu Stratonowicza. Według mojej wiedzy zagadnienie to stanowi nowy przedmiot badań. Jedynymi znanymi mi wynikami dotyczącymi inkluzji typu Stratonowicza są prace M. Michty i J. Motyla [29, 30] z 2007 roku. W pracy [29] autorzy badali istnienie słabych rozwiązań inkluzji Stratonowicza z multifunkcją różniczkowalną w sensie Hukuhary. Natomiast w pracy [30] pokazali istnienie mocnych rozwiązań inkluzji tego typu dla multifunkcji górnie oddzielanej.

Przedmiotem badań zawartych w rozprawie są zagadnienia dotyczące istnienia oraz własności zbioru mocnych rozwiązań inkluzji stochastycznych typu Stratonowicza. Badane są dwa typy inkluzji. Pierwsza z nich zawiera wielowartościową całkę typu Stratonowicza względem procesu Wienera W z multifunkcji F różniczkowalnej w sensie Hukuhary

$$(SI) \quad dx_t \in F(x_t) \circ dW_t.$$

Druga inkluzja badana w rozprawie zawiera wielowartościowe całki stochastyczne względem ciągłego semimartyngału z multifunkcji górnie oddzielanych oraz całkę z multifunkcji maksymalnie monotonicznej

$$(SII) \quad dx_t \in F(x_t) \circ dz_t + G(x_t)da_t - A(x_t)d[z,z]_t.$$

Klasa multifunkcji górnie oddzielanych ma niepusty przekrój z klasą multifunkcji różniczkowalnych w sensie Hukuhary, ale żadna z tych klas nie jest podzbiorem drugiej. Oznacza to, że nawet jeśli $z = W$, $G \equiv 0$, $A \equiv 0$, to inkluzja (SII) nie jest uogólnieniem inkluzji (SI).

Badanie takich inkluzji wymagało w pierwszej kolejności właściwego określenia oraz zbadania własności wielowartościowej całki typu Stratonowicza.

Praca została podzielona na cztery rozdziały. W rozdziale pierwszym przedstawione zostały pojęcia i twierdzenia wykorzystywane w rozprawie.

W rozdziale drugim zdefiniowana została wielowartościowa całka typu Stratonowicza względem procesu Wienera postaci $\int F(x_s) \circ dW_s$ dla klasy multifunkcji różniczkowalnych w sensie Hukuhary. Przedstawione zostały również warunki zapewniające istnienie tej całki, a także własności tej całki niezbędne do badania własności inkluzji typu Stratonowicza względem tej całki. Wyniki prezentowane w tym rozdziale stanowią treść współautorskiej pracy [12] opublikowanej w 2006 roku. Ostatnie twierdzenie tego rozdziału, Twierdzenie 2.14 nie było dotąd publikowane.

W rozdziale trzecim badana jest inkluzja (SI) względem wielowartościowej całki zdefiniowanej w rozdziale drugim. Udowodnione zostały twierdzenia o istnieniu oraz o domkniętości zbioru mocnych rozwiązań tej inkluzji. Wyniki zawarte w tym rozdziale nie były dotąd publikowane.

Rozdział czwarty poświęcony jest badaniu inkluzji typu Stratonowicza (SII). Rozdział ten stanowi próbę połączenia zagadnień rozważanych w pracach [30, 34, 37]. J. San Martin w pracy [37] uogólnił klasyczne wyniki dotyczące jednowymiarowych równań typu Stratonowicza i udowodnił istnienie rozwiązań równania ze współczynnikami należącymi do klasy funkcji $\mathcal{UAD}$, to znaczy funkcji absolutnie ciągłych, których pochodna posiada wersję cádlág. W pracy [30] M. Michta i J. Motyl wprowadzili pojęcie multifunkcji górnie oddzielanych oraz udowodnili istnienie mocnych rozwiązań inkluzji:

$$dx_t \in F(x_t) \circ dz_t + G(x_t)da_t.$$

Natomiat w pracy [34] R. Pettersson udowodnił istnienie rozwiązań inkluzji:

$$dx_t \in b(t, x_t)dt + \sigma(t, x_t)dB_t - A(x_t)dt,$$

w której b i σ są odwzorowaniami jednowartościowymi, spełniającymi warunek Lipschitza, a wielowartościowy operator A jest maksymalnie monotoniczny.

W rozdziale tym zdefiniowane zostały wielowartościowe całki niezbędne do poprawnego określenia rozwiązania inkluzji (SII), a także zbadane zostało istnienie mocnych rozwiązań tej inkluzji. Prezentowane wyniki stanowią treść współautorskiej pracy [13] przyjętej do druku w Dynamic Systems and Applications 2009. W rozdziale drugim, oprócz istnienia badano również pewne własności zbioru rozwiązań inkluzji (SI). W przypadku inkluzji (SII) własności te stanowią jeszcze otwarte problemy i są przedmiotem moich obecnych badań.

ROZDZIAŁ I

Preliminaria

1.1. Elementy rachunku prawdopodobieństwa i procesów stochastycznych

Niech dany będzie skończony przedział czasowy $I = [0, T]$ i zupełna przestrzeń probabilistyczna z filtracją $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_s)_{s\in I}, P)$. *Filtracja* $(\mathcal{F}_s)_{s\in I}$ jest niemalejącą rodziną σ-podalgebr z $\mathcal{F}$, to znaczy $\mathcal{F}_u \subset \mathcal{F}_s$ dla $u \le s$. Zakłada się, że filtracja jest prawostronnie ciągła, co oznacza że $\mathcal{F}_s = \bigcap_{u>s} \mathcal{F}_u$ dla każdego $s \in I$, oraz że σ -algebra $\mathcal{F}_0$ zawiera wszystkie zbiory z $\mathcal{F}$ o mierze prawdopodobieństwa zero. Symbolem $\mathcal{P}$ oznaczana jest σ-algebra generowana przez klasę wszystkich podzbiorów $I \times \Omega$ postaci $\{0\} \times F_0$ oraz $(u, s] \times F$, gdzie $F_0 \in \mathcal{F}_0$ oraz $F \in \mathcal{F}_u$ dla $u < s$ w I. Symbolem $dt \otimes dP$ oznaczana jest miara produktowa na σ- algebrze $\mathcal{P}$, gdzie dt jest miarą Lebesgue'a, a dP miarą probabilistyczną. Niech $\mathcal{L}^2 = L^2(I \times \Omega, \mathcal{P}, \mathrm{dt}\otimes\mathrm{dP}; R^1)$ będzie przestrzenią Hilberta.

Definicja 1.1 *Procesem stochastycznym* o wartościach rzeczywistych $x = (x_s)_{s\in I}$ określonym na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_s)_{s\in I}, P)$ nazywana jest rodzina zmiennych losowych $x_s : \Omega \to R^1$ dla $s \in I$. Funkcje $s \mapsto x_s$ działające z przedziału I do zbioru R^1 nazywane są *trajektoriami procesu* x.

Definicja 1.2 Proces $x = (x_s)_{s\in I}$ określony na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_s)_{s\in I}, P)$ nazywany jest

(i) adaptowalnym lub $(\mathcal{F}_s)_{s\in I}$*-adaptowalnym,* jeżeli x_s jest $\mathcal{F}_s$-mierzalny dla każdego $s \in I$,

(ii) przewidywalnym, jeżeli x jest $\mathcal{P}$- mierzalny,

(iii) ciągłym (prawostronnie ciągłym) na przedziale I, jeżeli prawie wszystkie jego trajektorie są ciągłe (prawostronnie ciągłe),

(iv) procesem càdlàg, jeżeli ma on prawostronnie ciągłe trajektorie ze skończonymi lewostronnymi granicami,

(v) FV-procesem, jeżeli x jest adaptowalnym procesem càdlàg oraz prawie wszystkie jego trajektorie mają wahanie ograniczone na zwartych podprzedziałach I.

Symbolem S^p oznaczana będzie przestrzeń Banacha wszystkich $(\mathcal{F}_s)_{s\in I}$-adaptowalnych procesów càdlàg $(x_s)_{s\in I}$, dla których $\|x\|_{S^p} < \infty$, gdzie

$$\|x\|_{S^p} = \| \sup_{s\in I} |x_s| \ \|_{L^p(\Omega)} \text{ i } 1 \le p \le \infty.$$

Definicja 1.3 Proces stochastyczny $W = (W_s)_{s\in I}$ nazywany jest *procesem Wienera,* jeśli ma następujące własności

(i) $W_0 \equiv 0$,

(ii) przyrosty procesu $W_t - W_s$ są jednorodne i niezależne od $\mathcal{F}_s$ dla $s < t$,

(iii) W_t ma rozkład normalny z wartością oczekiwaną równą 0 i wariancją równą t.

Definicja 1.4 Adaptowalny proces stochastyczny $x = (x_s)_{s\in I}$ nazywany jest *martyngałem* względem filtracji $(\mathcal{F}_s)_{s\in I}$, jeżeli

(i) $E|x_s| < \infty$ dla każdego $s \in I$,

(ii) $E(x_s|\mathcal{F}_u) = x_u$ dla $u \le s$ prawie na pewno.

Uwaga 1.5 Ponieważ wszystkie martyngały mają prawostronnie ciągłą modyfikację, to w dalszym ciągu rozprawy zakładać będziemy (bez zmniejszania ogólności), że martyngał jest zawsze procesem càdlàg.

Zmienna losowa $K : \Omega \to I$ jest *czasem zatrzymania*, jeżeli zdarzenie $\{K \le s\} \in \mathcal{F}_s$ dla każdego $s \in I$.

Adaptowalny proces càdlàg $m = (m_s)_{s\in I}$ jest *lokalnym martyngałem*, jeżeli istnieje rosnący ciąg czasów zatrzymania, K_n, spełniający prawie na pewno warunek $\lim_{n\to\infty} K_n = T$ i taki, że zastopowany proces $m^{K_n} = (m_{K_n \wedge s})_{s\in I}$ jest martyngałem.

Martyngał x jest *całkowalny z kwadratem*, jeśli $\sup_{s\in I} E(x_s^2) < \infty$.

Twierdzenie 1.6 (Nierówność Dooba, Theorem I.1.42 [18]) *Jeśli x jest martyngałem całkowalnym z kwadratem, to*

$$E(\sup_{s\in I} x_s^2) \leq 4 \sup_{s\in I} E(x_s^2) = 4E(x_T^2).$$

Własność 1.7 (Własność izometrii całki Itô, Corollary III.3.7 [32]) *Dla każdego adaptowalnego i $\mathcal{L}^2$-całkowalnego procesu f zachodzi*

$$E|\int_0^T f_s dW_s|^2 = E\int_0^T f_s^2 ds \tag{1}$$

Korzystając z Własności 1.7 nierówność Dooba dla całki Itô przyjmuje następującą postać

$$E(\sup_{t\in I} |\int_0^t f_s dW_s|^2) \leq 4E\int_0^T f_s^2 ds, \tag{2}$$

gdzie f jest adaptowalnym, $\mathcal{L}^2$-całkowalnym procesem.

Definicja 1.8 Stochastyczny proces x nazywany jest *specjalnym semimartyngałem,* jeśli można go przedstawić w postaci sumy: $x = m + v$, gdzie m jest lokalnym martyngałem, natomiast v jest przewidywalnym FV-procesem.

Uwaga 1.9 W dalszej części rozprawy specjalne semimartyngały, o ile nie prowadzi to do nieporozumień, będziemy nazywać semimartyngałami. O semimartyngale mówimy, że jest ciągły, jeżeli prawie wszystkie jego trajektorie są funkcjami ciągłymi.

Definicja 1.10 Niech D_n oznacza taki ciąg podziałów przedziału I, że

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t_i\in D_n} (t_{i+1} - t_i) = 0 \text{ oraz } \widetilde{M} := \sup_{n\geq 1} \sup_{t_i\in D_n} \frac{t_{i+1}}{t_i} < \infty.$$

Niech $0 = t_0 < t_1 < ... < t_{k(n)} < t_{k(n)+1} = T$ będą punktami podziału D_n. *Procesem wahania kwadratowego* procesów $x = (x_t)_{t\in I}$ i $y = (y_t)_{t\in I}$, oznaczanym przez $[x, y] = ([x, y]_t)_{t\in I}$, nazywana jest, o ile istnieje, następująca granica w sensie prawdopodobieństwa

$$[x, y]_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{t_i\in D_n,\ t_i<t} (x_{t_{i+1}} - x_{t_i})(y_{t_{i+1}} - y_{t_i}).$$

Własność 1.11 ([36]) *Jeśli x i y są semimartyngałami, to*

$$[x, y] = xy - \int x_- dy - \int y_- dx.$$

Definicję oraz własności stochastycznej całki $\int x_- dy$ z lewostronnego uciąglenia procesu x względem semimartyngału y można znaleźć w paragrafie szóstym rozdziału drugiego [36].

W szczególności, jeśli x jest ciągłym semimartyngałem i W jest procesem Wienera, to proces wahania kwadratowego spełnia warunek

$$[x, W] = xW - \int x dW - \int W dx.$$

Własność 1.12 ([36]) *Własności procesu wahania kwadratowego*

(i) Jeśli x i y są semimartyngałami, to odwzorowanie $(x, y) \to [x, y]$ jest dwuliniowe i symetryczne,

(ii) Jeśli x jest ciągłym FV-procesem, to $[x, x]_s = x_0^2$ dla każdego $s \in I$,

(iii) Jeśli x jest semimartyngałem, y jest procesem z trajektoriami o wahaniu ograniczonym oraz x lub y jest procesem ciągłym, to $[x, y] = 0$,

(iv) Proces wahania kwadratowego $[x, y]$ dwóch semimartyngałów x i y jest również semimartyngałem z trajektoriami o wahaniu ograniczonym na przedziałach zwartych.

Twierdzenie 1.13 (Nierówność Kunity-Watanabe, Theorem II.25 [36]) *Niech dane będą semimartyngały x i y oraz przewidywalne procesy f i g. Wtedy prawie wszędzie zachodzi*

$$\int_0^T |f_s||g_s||d[x, y]_s| \leq (\int_0^T f_s^2 d[x, x]_s)^{\frac{1}{2}} (\int_0^T g_s^2 d[y, y]_s)^{\frac{1}{2}}.$$

W szczególności jeśli x jest semimartyngałem oraz W jest procesem Wienera, to nierówność Kunity-Watanabe ma następującą postać

$$\int_0^T |f_s||g_s||d[x,W]_s| \leq (\int_0^T f_s^2 d[x,x]_s)^{\frac{1}{2}} (\int_0^T g_s^2 ds)^{\frac{1}{2}}.$$

Twierdzenie 1.14 (Theorem II.28, [36]) *Niech dane będą semimartyngały x i y oraz przewidywalne procesy f i g. Wtedy*

$$[\int f_s dx_s, \int g_s dy_s]_T = \int_0^T f_s g_s d[x,y]_s.$$

Symbolem $\mathcal{H}^2$ oznaczana będzie przestrzeń Banacha wszystkich semimartyngałów $x = m + v$ określonych w Definicji 1.8, które mają skończoną $\mathcal{H}^2$ normę:

$$\|x\|_{\mathcal{H}^2} = \|[m,m]_T^{1/2}\|_{L^2(\Omega)} + \| \int_0^T |dv_t|\|_{L^2(\Omega)},$$

gdzie $\int_0^T |dv_t|$ jest całkowitym wahaniem trajektorii procesu v.

Własność 1.15 (Theorem IV.5, [36]) *Niech x będzie semimartyngałem z przestrzeni $\mathcal{H}^2$. Wtedy*

$$E\{(\sup_{t\in I} |x_t|)^2\} = ||x||_{S^2}^2 \leq 8||x||_{\mathcal{H}^2}.$$

Definicja 1.16 Niech x będzie ciągłym semimartyngałem. *Lokalnym czasem* dla procesu x na poziomie p nazywany jest proces $L_s^p(\omega) = L^p(x)_s$, który dla każdego (p,s) spełnia

$$L^p(x)_s = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^s 1_{(p\leq x_\tau \leq p+\epsilon)} d[x,x]_\tau, \text{ prawie na pewno}$$

oraz

$$L^{p-}(x)_s = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^s 1_{(p-\epsilon\leq x_\tau \leq p)} d[x,x]_\tau, \text{ prawie na pewno.}$$

Twierdzenie 1.17 (Theorem III.7.1, [18]) *Niech x będzie ciągłym semimartyngałem na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_s)_{s\in I}, P)$. Wtedy istnieje lokalny czas w punkcie $p \in R^1$ dla procesu x spełniający warunki* *(i) Odwzorowanie $(s, p, \omega) \to L_s^p(\omega)$ jest mierzalne i dla każdego ustalonego (s, p) zmienna losowa L_s^p jest $\mathcal{F}_s$-mierzalna,*

(ii) Dla każdego ustalonego $p \in R^1$ odwzorowanie $s \to L_s^p(\omega)$ jest ciągłe i niemalejące oraz $L_0^p(\omega) = 0$,

(iii) Dla każdej mierzalnej funkcji $f : R^1 \to [0, \infty)$, dla każdego $s \in I$ i dla prawie wszystkich $\omega \in \Omega$

$$\int_{R^1} L_s^p(x) f(p) dp = \int_0^s f(x_\tau) d[x, x]_\tau,$$

(iv) Dla prawie wszystkich $\omega \in \Omega$ i dla wszystkich $(s, p) \in I \times R^1$ granice

$$L_s^p(\omega) = \lim_{\tau \to s,\ \ q \downarrow p} L_\tau^q(\omega) \ i \ L_s^{p-}(\omega) = \lim_{\tau \to s,\ \ q \uparrow p} L_\tau^q(\omega)$$

istnieją.

Własność (iv) z Twiedzenia 1.17 mówi, że dla prawie wszystkich $\omega \in \Omega$ lokalny czas $L_s^p(\omega)$ jest łącznie ciągły w s i jest procesem cádlág w punkcie p.

1.2. Elementy analizy wielowartościowej

Niech $Cl(R^1)$ oznacza rodzinę wszystkich niepustych i domkniętych podzbiorów R^1, $Conv(R^1)$ rodzinę wszystkich niepustych, domkniętych i wypukłych podzbiorów R^1, natomiast $CComp(R^1)$ rodzinę wszystkich niepustych, zwartych i wypukłych podzbiorów R^1.

Definicja 1.18 Niech $B, C \in Cl(R^1)$. *Odległością Hausdorffa* zbioru B od zbioru C nazywamy funkcję

$$H(B, C) = max\{\bar{H}(B, C), \bar{H}(C, B)\},$$

gdzie

$$\bar{H}(B, C) = \sup_{b \in B} dist(b, C) = \sup_{b \in B} \inf_{c \in C} d(b, c).$$

Własność 1.19 (Proposition 1.3.3, [24]) *Niech* $B, B', C, C' \in CComp(R^1)$. *Zachodzą wtedy następujące własności*

(i) $H(tB, tC) = tH(B, C)$ *dla wszystkich* $t \geq 0$,

(ii) $H(B + B', C + C') \leq H(B, C) + H(B', C')$,

(iii) $H(B, C) \leq H(B, C') + H(C', C)$,

(iv) $H(\lambda B, \mu C) \leq \max\{\lambda, \mu\} H(B, C) + |\lambda - \mu| [H(B, \{0\}) + H(C, \{0\})]$.

Niech $(\widetilde{\Omega}, \mathcal{A}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą μ. Niech zbiór $B \subset \widetilde{\Omega}$. Wtedy $||B||_{\widetilde{\Omega}} = \sup_{b \in B} ||a||_{\widetilde{\Omega}} = H(B, \{0\})$.

Definicja 1.20 *Multifunkcją* F działającą z przestrzeni $(\widetilde{\Omega}, \mathcal{A}, \mu)$ do przestrzeni podzbiorów R^1 nazywane jest odwzorowanie, które każdemu elementowi $\widetilde{\omega} \in \widetilde{\Omega}$ przyporządkowuje zbiór $F(\widetilde{\omega}) \in 2^{R^1}$. Jeżeli przynajmniej dla jednego elementu $\widetilde{\omega} \in \widetilde{\Omega}$ zbiór wartości multifunkcji $F(\widetilde{\omega}) \subset R^1$ jest niepusty, to multifunkcja F jest *właściwa.*

Definicja 1.21 Multifunkcja $F : \widetilde{\Omega} \to Cl(R^1)$ nazywana jest

(i) mierzalną, jeżeli przeciwobraz każdego otwartego zbioru $O \subset R^1$ jest mierzalny, to znaczy $\{\widetilde{\omega} \in \widetilde{\Omega} : \quad F(\widetilde{\omega}) \cap O \neq \emptyset\} \in \mathcal{A}$,

(ii) dolnie półciągłą w punkcie $\widetilde{\omega}_0 \in \widetilde{\Omega}$, jeżeli dla każdego otoczenia $N(y_0)$ punktu $y_0 \in F(\widetilde{\omega}_0)$ istnieje otoczenie $N(\widetilde{\omega}_0)$ punktu $\widetilde{\omega}_0 \in \widetilde{\Omega}$ takie, że dla każdego $\widetilde{\omega} \in \widetilde{\Omega}$ z tego otoczenia zbiór $F(\widetilde{\omega}) \cap N(y_0)$ jest niepusty,

(iii) górnie półciągłą w punkcie $\widetilde{\omega}_0 \in \widetilde{\Omega}$, jeżeli dla każdego otwartego zbioru V zawierającego $F(\widetilde{\omega}_0)$ istnieje otoczenie $N(\widetilde{\omega}_0)$ punktu $\widetilde{\omega}_0 \in \widetilde{\Omega}$ takie, że dla każdego $\widetilde{\omega} \in \widetilde{\Omega}$ z tego otoczenia zbiór $F(\widetilde{\omega}) \subset V$.

Definicja 1.22 Niech $F : (\widetilde{\Omega}, \mu) \to CComp(R^1)$. Multifunkcja F jest *ograniczona,* jeśli istnieje taka stała $M \geq 0$, że $H(F(\widetilde{\omega}), \{0\}) \leq M$.

Multifunkcja F jest *całkowo ograniczona,* jeśli istnieje $l \in L^2(\widetilde{\Omega}, \mu; R^1)$ takie, że $H(F(\widetilde{\omega}), \{0\}) \leq l(\widetilde{\omega})$. Multifunkcja F jest *lokalnie całkowo ograniczona,* jeśli na dowolnym zwartym zbiorze $B \subset \widetilde{\Omega}$ istnieje $l \in L^2(B, \mu; R^1)$ takie, że $H(F(\widetilde{\omega}), \{0\}) \leq l(\widetilde{\omega})$ dla każdego $\widetilde{\omega} \in B$.

Definicja 1.23 Niech dana będzie multifunkcja $F : \widetilde{\Omega} \to Cl(R^1)$. Mierzalna funkcja $f : \widetilde{\Omega} \to R^1$ nazywana jest *mierzalnym selektorem* multifunkcji F, jeśli $f(\widetilde{\omega}) \in F(\widetilde{\omega})$ dla prawie wszystkich $\widetilde{\omega} \in \widetilde{\Omega}$. Symbolem S_F będzie oznaczany zbiór wszystkich mierzalnych i $L^2(\widetilde{\Omega}, \mu, R^1)$-całkowalnych selektorów multifunkcji F.

Przytoczone poniżej twierdzenia selekcyjne Michaela oraz Kuratowskiego i Rylla-Nardzewskiego, a także własności zbioru mierzalnych selektorów multifunkcji F przedstawione są w wersji, w której będą wykorzystane w dalszej części rozprawy.

Twierdzenie 1.24 (Tw. Kuratowskiego, Ryll-Nardzewskiego, Theorem II.3.10 [19]) *Niech $(\widetilde{\Omega}, \mathcal{A}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą μ. Mierzalna multifunkcja $F : \widetilde{\Omega} \to Cl(R^1)$ posiada mierzalny selektor.*

Twierdzenie 1.25 (Theorem 1.4, [14]) *Niech $F_1, F_2 : \widetilde{\Omega} \to 2^{R^1}$ będą multifunkcjami mierzalnymi oraz $F(\widetilde{\omega}) = cl(F_1(\widetilde{\omega}) + F_2(\widetilde{\omega}))$ dla $\widetilde{\omega} \in \widetilde{\Omega}$. Wtedy F jest również multifunkcją mierzalną. Ponadto jeśli S_{F_1} i S_{F_2} są niepuste, to $S_F = cl_{L^2(\widetilde{\Omega}; R^1)}(S_{F_1} + S_{F_2})$.*

Niech $\overline{co}F(\widetilde{\omega})$ oznacza domkniętą i wypukłą otoczkę zbioru $F(\widetilde{\omega})$ w R^1.

Twierdzenie 1.26 (Theorem 1.5, [14]) *Niech $F : \widetilde{\Omega} \to 2^{R^1}$ będzie multifunkcją mierzalną oraz $(\overline{co}F)(\widetilde{\omega}) = \overline{co}F(\widetilde{\omega})$ dla $\widetilde{\omega} \in \widetilde{\Omega}$. Wtedy $\overline{co}F$ jest również multifunkcją mierzalną. Ponadto jeśli S_F jest niepusty, to $S_{\overline{co}F} = \overline{co}_{L^2(\widetilde{\Omega}; R^1)} S_F$.*

Niech $(\widetilde{\Omega}, \mathcal{A}, \mu)$ będzie σ-skończoną przestrzenią z miarą μ. Niech dana będzie mierzalna multifunkcja $F : \widetilde{\Omega} \to 2^{R^1}$ oraz $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-mierzalna funkcja $\phi : \widetilde{\Omega} \times R^1 \to R^1$, gdzie $\mathcal{B}$ oznacza σ-algebrę zbiorów borelowskich z R^1. Dla mierzalnego selektora multifunkcji F, $f : \widetilde{\Omega} \to R^1$ zdefiniowany jest funkcjonał $I_\phi(f) = \int_{\widetilde{\Omega}} \phi(\widetilde{\omega}, f(\widetilde{\omega}))d\mu$.

Twierdzenie 1.27 (Theorem 2.2, [14]) *Niech $F : \widetilde{\Omega} \to 2^{R^1}$ będzie multifunkcją mierzalną oraz $\phi : \widetilde{\Omega} \times R^1 \to R^1$ będzie $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-mierzalną funkcją. Jeśli ϕ jest funkcją ciągłą w punkcie $t \in R^1$ dla każdego $\widetilde{\omega} \in \widetilde{\Omega}$ oraz zdefiniowany dla każdego $f \in S_F$ funkcjonał $I_\phi(f)$ spełnia $I_\phi(f_0) < \infty$ dla pewnego $f_0 \in S_F$, to*

$$(i) \quad \inf_{f \in S_F} I_\phi(f) = \int_{\widetilde{\Omega}} \inf_{t \in F(\widetilde{\omega})} \phi(\widetilde{\omega}, t)d\mu,$$

$$(ii) \quad \sup_{f \in S_F} I_\phi(f) = \int_{\widetilde{\Omega}} \sup_{t \in F(\widetilde{\omega})} \phi(\widetilde{\omega}, t)d\mu.$$

Twierdzenie 1.28 (Theorem Michaela, [2]) *Dolnie półciągła multifunkcja $F : R^1 \to Conv(R^1)$ posiada ciągłą selekcję.*

Definicja 1.29 Niech $B, C \in CComp(R^1)$.

Zbiór $D := (B \div C) \in CComp(R^1)$ nazywany jest *różnicą Hukuhary* zbiorów B i C, jeśli $B = C + D$, gdzie " $+$ " oznacza algebraiczną sumę zbiorów C, D.

Multifunkcja $F : R^1 \to CComp(R^1)$ jest *różniczkowalna w sensie Hukuhary* w punkcie $t_0 \in R^1$, jeśli istnieje zbiór $(DF)(t_0)$ taki, że granice

$$\lim_{\triangle t \to 0^+} \frac{F(t_0 + \triangle t) \div F(t_0)}{\triangle t}$$

oraz

$$\lim_{\triangle t \to 0^+} \frac{F(t_0) \div F(t_0 - \triangle t)}{\triangle t}$$

istnieją i są równe $(DF)(t_0)$. Granice te są rozumiane w sensie metryki Hausdorffa. *Multifunkcja F jest różniczkowalna w sensie Hukuhary*, jeśli posiada pochodną Hukuhary w każdym punkcie $t \in R^1$.

ROZDZIAŁ II

Wielowartościowa całka typu Stratonowicza względem procesu Wienera

W rozprawie badane są dwie różne klasy multifunkcji, dla których określone zostaną wielowartościowe całki typu Stratonowicza. W tym rozdziale zostanie zdefiniowana wielowartościowa całka typu Stratonowicza dla multifunkcji różniczkowalnych w sensie Hukuhary oraz zaprezentowane będą podstawowe własności tej całki, niezbędne do badania własności zbioru rozwiązań inkluzji typu Stratonowicza. Druga definicja wielowartościowej całki typu Stratonowicza względem górnie oddzielanych multifunkcji będzie przedstawiona w rozdziale czwartym.

2.1. Definicja wielowartościowej całki typu Stratonowicza

Niech dany będzie skończony przedział czasowy $I = [0,T]$, zupełna przestrzeń probabilistyczna z filtracją $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_s)_{s\in I}, P)$ oraz przestrzeń Hilberta $\mathcal{L}^2 = L^2(I \times \Omega, \mathcal{P}, \mathrm{dt}\otimes\mathrm{dP}; R^1)$.

Definicja 2.1 Niech $F : R^1 \to CComp(R^1)$. Dla semimartyngału x symbolem $S_{F\bullet x}$ oznaczany będzie zbiór wszystkich przewidywalnych, $(\mathbf{F}_s)_{s\in I}$-adaptowalnych i $\mathcal{L}^2$-całkowalnych selektorów złożenia $F \bullet x$, to znaczy

$$S_{F\bullet x} = \{f \in \mathcal{L}^2 : \quad f_s \in F(x_s) \;\; dt \otimes dP - p.w.\}$$

Podobnie definiujemy zbiór selektorów $S_{(DF)\bullet x}$ dla złożenia pochodnej Hukuhary DF multifunkcji F oraz semimartyngału x.

Niech $W = (W_s)_{s\in I}$ będzie procesem Wienera określonym w Definicji 1.3.

Definicja 2.2 Niech x będzie ciągłym semimartyngałem oraz multifunkcja $F : R^1 \to CComp(R^1)$ niech będzie taka, że $F \bullet x : I \times \Omega \to CComp(R^1)$

określone wzorem $(F \bullet x)(t,\omega) = F(x(t,\omega)) = F(x_t)$ jest multifunkcją mierzalną i całkowo ograniczoną. Wówczas wielowartościowa całka Itô ze złożenia $F \bullet x$ względem procesu Wienera W definiowana jest jako zbiór

$$\int F(x_s)dW_s = \{\int f_s dW_s : \quad f \in S_{F\bullet x}\}.$$

Niech $[x,W]$ będzie procesem wahania kwadratowego ciągłego semimartyngału x i procesu Wienera W. Definicja oraz podstawowe własności procesu wahania kwadratowego omówione zostały w paragrafie pierwszym rozdziału pierwszego.

Definicja 2.3 Niech x będzie ciągłym semimartyngałem. Niech multifunkcja $G : R^1 \to CComp(R^1)$ będzie mierzalna i lokalnie całkowo ograniczona. Wówczas wielowartościowa stochastyczna całka ze złożenia multifunkcji G z ciągłym semimartyngałem x względem procesu wahania kwadratowego $[x,W]$ definiowana jest jako zbiór

$$\int G(x_s)d[x,W]_s = \{\int g_s d[x,W]_s : \quad g \in S_{G\bullet x}\}.$$

Na mocy Własności 1.12 (iv) proces wahania kwadratowego $[x,W]$ jest procesem o wahaniu ograniczonym, więc całka $\int G(x_s)d[x,W]_s$ może być traktowana jako całka Lebesgue'a-Stieltjesa z parametrem.

Definicja 2.4 Niech x będzie ciągłym semimartyngałem. Niech multifunkcja $F : R^1 \to CComp(R^1)$ będzie różniczkowalna w sensie Hukuhary oraz niech DF będzie pochodną multifunkcji F. *Wielowartościowa stochastyczna całka typu Stratonowicza* z multifunkcji F względem pocesu Wienera W definiowana jest jako zbiór

$$\int F(x_s) \circ dW_s := \int F(x_s)dW_s + \frac{1}{2}\int (DF)(x_s)d[x,W]_s, \tag{3}$$

przy założeniu, że wielowartościowe całki po prawej stronie powyższej równości są zbiorami niepustymi.

Podobnie definiujemy $\int_s^t F(x_\tau) \circ dW_\tau$ dla $s, t \in I$ jako zbiór postaci

$$\int_s^t F(x_\tau) \circ dW_\tau = \{\int_s^t f_\tau dW_\tau + \frac{1}{2}\int_s^t f_\tau^1 d[x, W]_\tau : \quad f \in S_{F\bullet x} \text{ i } f^1 \in S_{DF\bullet x}\}.$$

Wtedy $\int F(x_\tau) \circ dW_\tau = (\int_0^t F(x_\tau) \circ dW_\tau)_{t\in I}$.

2.2. Istnienie i własności wielowartościowej całki typu Stratonowicza

Zasadniczym tematem rozprawy są stochastyczne inkluzje różniczkowe typu Stratonowicza z wielowartościowymi całkami określonymi w Definicji 2.4. Z tego powodu całki $\int F(x_s) \circ dW_s$ powinny być poprawnie określone, to znaczy być zbiorami niepustymi, co najmniej dla takiej klasy procesów x, która zawiera rodzinę wszystkich rozwiązań inkluzji. Definicja rozwiązania inkluzji typu Stratonowicza zaprezentowana będzie w rozdziale trzecim. W myśl tej definicji rozwiązania inkluzji są ciągłymi semimartyngałami postaci

$$x_t = \int_0^t b_s dW_s + v_t, \tag{4}$$

gdzie b jest $(\mathbf{F}_s)_{s\in I}$-adaptowalnym i $\mathcal{L}^2$-całkowalnym procesem, natomiast v jest pewnym ciągłym FV-procesem. Własności całek pokazane w tym paragrafie dla procesów z klasy (4) wystarczają do otrzymania odpowiednich rezultatów dotyczących zbioru rozwiązań inkluzji.

Ponieważ Twiedzenie 2.5 o istnieniu wielowartościowej całki typu Stratonowicza zostało pokazane bez ograniczeń typu (4), naturalnym wydaje się pytanie, czy w pozostałych twierdzeniach tego rozdziału warunek (4) może zostać zastąpiony ogólniejszym warunkiem "x jest ciągłym semimartyngałem". Problem ten stanowi przedmiot moich obecnych badań.

Twierdzenie 2.5 *Niech x będzie ciągłym semimartyngałem. Jeżeli multifunkcja $F : R^1 \to CComp(R^1)$ jest różniczkowalna w sensie Hukuhary oraz jej pochodna DF jest lokalnie całkowo ograniczona, to wielowartościowa całka typu Stratonowicza $\int F(x(s)) \circ dW(s)$ jest zbiorem niepustym.*

Dowód. Chcąc udowodnić istnienie wielowartościowej całki typu Stratonowicza należy znaleźć selektory $f \in S_{F\bullet x}$ i $f^1 \in S_{DF\bullet x}$, dla których całki $\int_0^t f_s dW_s$ i $\int_0^t f_s^1 d[x,W]_s$ istnieją dla $t \in I$.

Multifunkcja F, będąc różniczkowalna w sensie Hukuhary, jest multifunkcją ciągłą o wypukłych wartościach. Wtedy na mocy Twierdzenia 1.28 multifunkcja F posiada ciągły selektor f. Ponieważ $f(x_s)$ jest ciągłym procesem, to całka $\int_0^t f(x_s)dW_s$ istnieje. Ponadto, $f(x_s) \in S_{F\bullet x}$.

Chcąc udowodnić niepustość zbioru $\int (DF)(x_s)d[x,W]_s$ należy zauważyć, że pochodna Hukuhary DF jest multifunkcją mierzalną. Wtedy na podstawie Twierdzenia 1.24 multifunkcja DF posiada mierzalną selekcję f^1. Korzystając z lokalnej całkowej ograniczoności DF otrzymujemy, że $f^1 \in L^2_{loc}(R^1)$. Należy jeszcze pokazać, że całka $\int_0^t f^1(x_s)d[x,W]_s$ istnieje.

Korzystając z nierówności Kunity-Watanabe (Twierdzenie 1.13) otrzymujemy

$$\begin{aligned} &|\int_0^t f^1(x_s)d[x,W]_s| \\ &\leq (\int_0^t (f^1(x_s))^2 d[x,x]_s)^{\frac{1}{2}} (\int_0^t d[W,W]_s)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\int_0^t (f^1(x_s))^2 d[x,x]_s)^{\frac{1}{2}} (t)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Na mocy Twierdzenia 1.17 (iii), uzyskujemy

$$|\int_0^t f^1(x_s)d[x,W]_s| \leq (\int_R (f^1(p))^2 L_t^p(x)dp)^{\frac{1}{2}} (t)^{\frac{1}{2}},$$

gdzie $L_t^p(x)$ jest lokalnym czasem procesu x. Z Definicji 1.16 lokalnego czasu dla ciągłego semimartyngału x oraz własności lokalnego czasu zawartej w Twierdzeniu IV.50 z pracy [36] wynika, że dla każdego $p > x_t^* = \sup_{s\leq t}|x_s|$, $L_t^p(x) = 0$ oraz że $\sup_p L_t^p(x) < \infty$ prawie na pewno. Wówczas

$$|\int_0^t f^1(x_s)d[x,W]_s| \leq (\sup_p \ L_t^p(x) \ \ t)^{\frac{1}{2}} (\int_{-x_t^*}^{x_t^*} (f^1(p))^2 dp)^{\frac{1}{2}} < \infty \ \ p.n.$$

Oznacza to, że $\int_0^t F(x_s) \circ dW_s$ jest zbiorem niepustym dla $t \in I$.

■

Uwaga 2.6 Korzystając z postaci (4) procesu x oraz z własności procesu wahania kwadratowego wielowartościową całkę typu Stratonowicza można zapisać w następujący sposób

$$\int F(x_s) \circ dW_s := \int F(x_s) dW_s + \frac{1}{2} \int (DF)(x_s) b_s ds. \tag{5}$$

Dowód. Korzystając z postaci (4) procesu x

$$\int F(x_s) \circ dW_s = \int F(x_s) dW_s + \frac{1}{2} \int (DF)(x_s) d[x, W]_s$$

$$= \int F(x_s) dW_s + \frac{1}{2} \int (DF)(x_s) d[\int b_\tau dW_\tau + v, W]_s$$

$$= \int F(x_s) dW_s + \frac{1}{2} \int (DF)(x_s)(d[\int b_\tau dW_\tau, W]_s + d[v, W]_s).$$

W ostatniej równości wykorzystano Własność 1.12 (i). Ponieważ W jest ciągłym procesem Wienera, a x_0 i v są procesami o wahaniu ograniczonym, więc na mocy Własności 1.12 (iii) proces wahania kwadratowego $[v, W] = 0$. Na mocy Twierdzenia 1.14 proces wahania kwadratowego $[\int b_\tau dW_\tau, W]_s = \int_0^s b_\tau d\tau$. Stąd

$$\int (DF)(x_s) d[\int b_\tau dW_\tau + v, W]_s = \int (DF)(x_s) b_s ds.$$

■

Definicja 2.7 Multifunkcja $F : R^1 \to CComp(R^1)$ jest *semimartyngałowo ograniczona,* jeśli istnieje taki proces $m \in L^2(I \times \Omega)$, że dla każdego $x \in \mathcal{H}^2$

$$H_{R^1}(F(x_s), \{0\}) \leq m_s.$$

Twierdzenie 2.8 *Niech multifunkcja* $F : R^1 \to CComp(R^1)$ *będzie różniczkowalna w sensie Hukuhary i niech* DF *będzie jej pochodną Hukuhary. Niech* b *będzie* $(\mathbf{F}_s)_{s\in I}$*-adaptowalnym i* $\mathcal{L}^2$*-całkowalnym procesem oraz* v *niech będzie ciągłym* FV*-procesem. Załóżmy, że* $x = \int b_s dW_s + v$*. Jeśli* F *i* DF *są semimartyngałowo ograniczone, to wielowartościowa całka typu Stratonowicza* $\int F(x_s) \circ dW_s$ *jest zbiorem ograniczonym w przestrzeni* S^1*.*

Dowód. Korzystając z postaci procesu $x = \int b_s dW_s + v$, Uwagi 2.6 i faktu, że $||\cdot||_{L^1(\Omega)} \leq ||\cdot||_{L^2(\Omega)}$, otrzymujemy

$$\|\int F(x_s) \circ dW_s\|_{S^1}$$

$$= \|\int F(x_s) dW_s + \frac{1}{2}\int (DF)(x_s) d[x, W]_s\|_{S^1}$$

$$\leq \|\int F(x_s) dW_s\|_{S^1} + \frac{1}{2}\|\int (DF)(x_s) b_s ds\|_{S^1}$$

$$\leq \sup_{f\in S_{F\bullet x}} \|\sup_{t\in I}|\int_0^t f_s dW_s| \ \|_{L^2(\Omega)}$$

$$+\frac{1}{2}\sup_{f^1\in S_{(DF)\bullet x}} \|\sup_{t\in I}|\int_0^t f_s^1 b_s ds|\,\|_{L^1(\Omega)}.$$

Stosując do pierwszego składnika nierówność Dooba oraz własność izometrii całki Itô, na mocy (2), powyższą nierówność można następująco oszacować

$$\leq 4 \sup_{f\in S_{F\bullet x}} E(\int_0^T (f_s)^2 ds)$$

$$+\frac{1}{2}\sup_{f^1\in S_{(DF)\bullet x}} E(\sup_{t\in I}|\int_0^t f_s^1 b_s ds| \ ),$$

a następnie stosując do drugiego składnika nierówność Höldera mamy

$$\leq 4 \sup_{f \in S_{F \bullet x}} E(\int_0^T (f_s)^2 ds)$$

$$+\frac{1}{2} \sup_{f^1 \in S_{(DF) \bullet x}} (E \int_0^T (f_s^1)^2 ds|)^{\frac{1}{2}} (E \int_0^T (b_s)^2 ds)^{\frac{1}{2}}.$$

Zatem

$$\| \int F(x_s) \circ dW_s \|_{S^1}$$

$$\leq 4 \sup_{f \in S_{F \bullet x}} \|f\|_{L^2(I \times \Omega)}$$

$$+\frac{1}{2} \sup_{f_1 \in S_{(DF) \bullet x}} \|f^1\|_{L^2(I \times \Omega)} \cdot \|b\|_{L^2(I \times \Omega)}$$

$$= 4H(F(x_s), \{0\}) + \frac{1}{2} H((DF)(x_s), \{0\}) \|b\|_{L^2(I \times \Omega)}.$$

Z założenia semimartyngałowej ograniczoności F i DF wnioskujemy, że $\int F(x(s)) \circ dW(s)$ jest zbiorem ograniczonym w przestrzeni S^1.

■

Twierdzenie 2.9 *Niech multifunkcje* $F, G : R^1 \to CComp(R^1)$ *będą różniczkowalne w sensie Hukuhary oraz niech* DF *i* DG *będą ich pochodnymi. Niech* b *będzie* $(\mathbf{F}_s)_{s \in I}$*-adaptowalnym i* $\mathcal{L}^2$*-całkowalnym procesem oraz niech* v *będzie ciągłym* FV*-procesem. Załóżmy, że* $x = \int b_s dW_s + v$*. Jeśli* DF *i* DG *są lokalnie całkowo ograniczone, to* S^1*-domknięcie wielowartościowej całki typu Stratonowicza jest operacją liniową. Oznacza to, że dla każdych rzeczywistych stałych* α *i* β

$$cl_{S^1}(\int (\alpha F(x_s) + \beta G(x_s)) \circ dW_s)$$

$$= cl_{S^1}(\alpha \int F(x_s) \circ dW_s + \beta \int G(x_s) \circ dW_s).$$

Dowód. Addytywność. W pierwszym kroku pokażemy, że

$$\int (F(x_s)+G(x_s))\circ dW_s \subseteq cl_{S^1}(\int F(x_s)\circ dW_s + \int G(x_s)\circ dW_s).$$

Niech $J(x_s) = F(x_s) + G(x_s)$. Ponieważ $F(x_s)$ i $G(x_s)$ są zbiorami zwartymi oraz algebraiczna suma zbiorów zwartych jest zbiorem zwartym, więc $J \in CComp(R^1)$. Oznacza to, że $clJ(x_s) = J(x_s)$. Niech z będzie dowolnym elementem ze zbioru $\int J(x_s)\circ dW_s$. Wówczas

$$z = \int h_s dW_s + \frac{1}{2}\int \widetilde{h}_s b_s ds,$$

gdzie $h \in S_{J\bullet x}$ i $\widetilde{h} \in S_{(DJ)\bullet x}$.

Ponieważ $J(x_s) = F(x_s) + G(x_s)$, $(DJ)(x_s) = (DF)(x_s) + (DG)(x_s)$, $h_s \in J(x_s)$ i $\widetilde{h}_s \in (DJ)(x_s)$, więc na podstawie Twierdzenia 1.25 otrzymujemy

$$S_{J\bullet x} = cl_{L^2(I\times\Omega)}(S_{F\bullet x} + S_{G\bullet x})$$

oraz

$$S_{(DJ)\bullet x} = cl_{L^2(I\times\Omega)}(S_{(DF)\bullet x} + S_{(DG)\bullet x}).$$

Oznacza to, że istnieją ciągi $f^n \in S_{F\bullet x}$, $g^n \in S_{G\bullet x}$, $\widetilde{f}^n \in S_{(DF)\bullet x}$, $\widetilde{g}^n \in S_{(DG)\bullet x}$ takie, że

$$\begin{cases} h = lim_{n\to\infty}(f^n + g^n) \\ \widetilde{h} = lim_{n\to\infty}(\widetilde{f}^n + \widetilde{g}^n), \end{cases} \tag{6}$$

gdzie granice rozumiane są w sensie normy $L^2(I\times\Omega)$.

Pokażemy, że $z \in cl_{S^1}(\int F(x_s)\circ dW_s + \int G(x_s)\circ dW_s)$ lub równoważnie, że

$$\lim_{n\to\infty} \| \int h_s dW_s + \frac{1}{2}\int \widetilde{h}_s b_s ds$$
$$-(\int f^n_s dW_s + \frac{1}{2}\int \widetilde{f}^n_s b_s ds + \int g^n_s dW_s + \frac{1}{2}\int \widetilde{g}^n_s b_s ds) \ \|_{S^1} = 0.$$

Zatem

$$|| \int h_s - (f^n_s + g^n_s) dW_s + \frac{1}{2}\int (\widetilde{h}_s - (\widetilde{f}^n_s + \widetilde{g}^n_s)) b_s ds \ \|_{S^1}$$

$$\leq \| \sup_{t\in I} | \int_0^t h_s - (f_s^n + g_s^n) dW_s | \|_{L^2(\Omega)}$$

$$+\frac{1}{2} \| \sup_{t\in I} | \int_0^t (\widetilde{h}_s - (\widetilde{f}_s^n + \widetilde{g}_s^n)) b_s ds | \|_{L^1(\Omega)}$$

$$\leq (4E | \int_0^T h_s - f_s^n - g_s^n dW_s |^2)^{1/2}$$

$$+\frac{1}{2} \int_{I\times\Omega} |(\widetilde{h}_s - (\widetilde{f}_s^n + \widetilde{g}_s^n)) b_s| ds \otimes dP$$

$$\leq 2 \| h - f^n - g^n \|_{L^2(I\times\Omega)} + \frac{1}{2} \| \widetilde{h} - \widetilde{f}^n - \widetilde{g}^n \|_{L^2(I\times\Omega)} \cdot \| b \|_{L^2(I\times\Omega)}.$$

Ostatnie wyrażenie zbiega do zera na podstawie wzorów (6).

Stąd

$$z \in cl_{S^1}(\int F(x_s) \circ dW_s + \int G(x_s) \circ dW_s).$$

Pokażemy teraz, że

$$\int F(x_s) \circ dW_s + \int G(x_s) \circ dW_s \subseteq \int (F(x_s) + G(x_s)) \circ dW_s.$$

W tym celu weźmy dowolny $z \in \int F(x_s) \circ dW_s + \int G(x_s) \circ dW_s$. Wówczas istnieją selektory $f \in S_{F\bullet x}$, $g \in S_{G\bullet x}, \widetilde{f} \in S_{(DF)\bullet x}$, $\widetilde{g} \in S_{(DG)\bullet x}$ takie, że

$$z = \int f_s dW_s + \frac{1}{2} \int \widetilde{f}_s b_s ds + \int g_s dW_s + \frac{1}{2} \int \widetilde{g}_s b_s ds.$$

Niech $h = f + g$ i $\widetilde{h} = \widetilde{f} + \widetilde{g}$. Ponownie korzystając z Twierdzenia 1.25 oraz z liniowości pochodnej Hukuhary otrzymujemy

$$h = f + g \in S_{F\bullet x} + S_{G\bullet x}$$

$$\subset cl_{L^2(I\times\Omega)}(S_{F\bullet x} + S_{G\bullet x}) = S_{cl(F+G)\bullet x} = S_{(F+G)\bullet x}.$$

Podobnie jak w pierwszej części dowodu pokazujemy,
że $\widetilde{h} = \widetilde{f} + \widetilde{g} \in S_{(D(F+G))\bullet x}$, a stąd otrzymujemy $z \in \int(F+G)(x_s) \circ dW_s$.

Jednorodność całki. Niech $z \in \lambda \int F(x_s) \circ dW_s$. Wówczas

$$z = \lambda(\int f_s dW_s + \frac{1}{2}\int \widetilde{f}_s b_s ds),$$

gdzie $f \in S_{F\bullet x}$ and $\widetilde{f} \in S_{(DF)\bullet x}$. Jeśli oznaczymy przez $g := \lambda f$ i $\widetilde{g} := \lambda \widetilde{f}$, to wtedy $g \in S_{(\lambda F)\bullet x}$ oraz $\widetilde{g} \in S_{(D(\lambda F))\bullet x} = S_{\lambda(DF)\bullet x}$. Stąd $z \in \int \lambda F(x_s) \circ dW_s$. Zawieranie w przeciwną stronę pokazujemy w podobny sposób.

$\blacksquare$

Własność 2.10 *Jeżeli spełnione są założenia Twierdzenia 2.9, to wielowartościowa całka typu Stratonowicza $\int F(x_s) \circ dW_s$ jest zbiorem wypukłym.*

Dowód. Niech c i d będą dwoma dowolnymi elementami ze zbioru $\int F(x_s) \circ dW_s$. Wówczas istnieją procesy $f, g \in S_{F\bullet x}$ oraz $f^1, g^1 \in S_{(DF)\bullet x}$ takie, że

$$c = \int f_s dW_s + \frac{1}{2}\int f_s^1 b_s ds$$

$$d = \int g_s dW_s + \frac{1}{2}\int g_s^1 b_s ds.$$

Weźmy dowolne $\lambda \in [0,1]$. Ponieważ multifunkcje F i DF mają zwarte wartości, więc na mocy Twierdzenia 1.26 wnioskujemy, że

$$h = \lambda f + (1-\lambda)g \in \overline{co} S_{F\bullet x} = S_{(\overline{co}F)\bullet x} = S_{F\bullet x}.$$

W podobny sposób pokazujemy, że

$$h^1 = \lambda f^1 + (1-\lambda)g^1 \in S_{(DF)\bullet x}.$$

Stąd element $\lambda c + (1-\lambda)d$ należy do zbioru $\int F(x_s) \circ dW_s$.

$\blacksquare$

Twierdzenie 2.11 *Niech $F, G : R^1 \to CComp(R^1)$ będzie różniczkowalna w sensie Hukuhary oraz niech DF i DG będą ich pochodnymi. Niech b będzie $(\mathbf{F}_s)_{s\in I}$-adaptowalnym $\mathcal{L}^2$-całkowalnym procesem oraz niech v będzie ciągłym FV-procesem. Załóżmy, że $x = \int b_s dW_s + v$. Jeśli DF i DG są lokalnie całkowo ograniczone, to*

$$H^2_{\mathcal{H}^2}(\int F(x_s) \circ dW_s, \int G(x_s) \circ dW_s) \le 2\sqrt{T} \| \int H^2_R(F(x_s), G(x_s)) dW_s \|_{\mathcal{H}^2}$$

$$+\frac{1}{2} \cdot T \| \int |b_s|^2 H^2_R((DF)(x_s), (DG)(x_s)) ds \|_{\mathcal{H}^2}.$$

Dowód. Niech $f \in S_{F\bullet x}$ i $f^1 \in S_{(DF)\bullet x}$. Ze względu na uproszczenie zapisu w dalszej części dowodu będą stosowane następujące oznaczenia

$$\sup_{f\in S_{F\bullet x},\ f^1 \in S_{(DF)\bullet x}} := \sup_{f,f^1},$$

$$\inf_{g\in S_{G\bullet x},\ g^1 \in S_{(DG)\bullet x}} := \inf_{g,g^1}.$$

Niech $\overline{H}$ oznacza półmetrykę Hausdorffa w przestrzeni $\mathcal{H}^2$. Wtedy z Uwagi 2.6 otrzymujemy

$$\overline{H}^2(\int F(x_s) \circ dW_s, \int G(x_s) \circ dW_s)$$

$$= \sup_{z \in \int F(x_s) \circ dW_s} dist^2_{\mathcal{H}^2}(z, \int G(x_s) \circ dW_s)$$

$$= \sup_{f,f^1} dist^2_{\mathcal{H}^2}(\int f_s dW_s + \frac{1}{2}\int f^1_s b_s ds, \int G(x_s) dW_s + \frac{1}{2}\int (DG)(x_s) b_s ds)$$

$$= \sup_{f,f^1} \inf_{g,g^1} || \int f_s dW_s + \frac{1}{2}\int f^1_s b_s ds - \int g_s dW_s - \frac{1}{2}\int g^1_s b_s ds ||^2_{\mathcal{H}^2}$$

$$\le 2 \sup_{f,f^1} \{ \inf_{g} || \int (f_s - g_s) dW_s ||^2_{\mathcal{H}^2} + \inf_{g^1} || \frac{1}{2} \int (f^1_s - g^1_s) b_s ds ||^2_{\mathcal{H}^2} \}$$

$$= 2 \sup_{f,f^1} \{ \inf_g E \int_0^T |f_s - g_s|^2 ds + \frac{1}{4} \inf_{g^1} E(\int_0^T |(f_s^1 - g_s^1) b_s| ds)^2 \}.$$

Stosując do drugiego składnika nierówność Höldera oraz korzystając z Twierdzenia 1.27 (i) powyższe wyrażenie można oszacować jako

$$\leq 2 \sup_{f,f^1} \{ E \int_0^T \inf_{\alpha \in G(x_s)} |f_s - \alpha|^2 ds + \frac{1}{4} T E(\int_0^T \inf_{\beta \in (DG)(x_s)} (f_s^1 - \beta)^2 |b_s|^2 ds \}$$

$$= 2 \sup_f E \int_0^T dist^2_{R^1}(f_s, G(x_s)) ds + \frac{1}{2} T \sup_{f^1} E(\int_0^T |b_s|^2 dist^2_{R^1}(f_s^1, (DG)(x_s)) ds.$$

Ponownie na mocy Twierdzenia 1.27 (ii) powyższe wyrażenie jest równe

$$= 2E \int_0^T \sup_{\gamma \in F(x_s)} dist^2_{R^1}(\gamma, G(x_s)) ds$$

$$+ \frac{1}{2} T E \int_0^T |b_s|^2 \sup_{\theta \in (DF)(x_s)} dist^2_{R^1}(\theta, (DG)(x_s)) ds$$

$$\leq 2E \int_0^T H^2_{R^1}(F(x_s), G(x_s)) ds + \frac{1}{2} T E \int_0^T |b_s|^2 H^2_{R^1}((DF)(x_s), (DG)(x_s)) ds.$$

Ponieważ pierwszy czynnik powyższej nierówności może być oszacowany jako

$$|| \int_0^T H^2_{R^1}(F(x_s), G(x_s)) ds ||_{L^1(\Omega)}$$

$$\leq || \int_0^T H^2_{R^1}(F(x_s), G(x_s)) ds ||_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq \sqrt{T} || \int H^2_{R^1}(F(x_s), G(x_s)) dW_s ||_{\mathcal{H}^2},$$

więc ostatecznie uzyskujemy

$$\overline{H}^2 (\int F(x_s) \circ dW_s, \int G(x_s) \circ dW_s)$$

$$\leq 2\sqrt{T} \| \int H_R^2(F(x_s), G(x_s))dW_s \ \|_{\mathcal{H}^2}$$

$$+\frac{1}{2} \cdot T \| (\int |b_s|^2 H_R^2((DF)(x_s), (DG)(x_s))ds \ \|_{\mathcal{H}^2}.$$

Podobnie pokazujemy, że $\overline{H}^2(\int G(x_s) \circ dW_s, \int F(x_s) \circ dW_s)$, co kończy dowód.

■

Własność wielowartościowych całek typu Stratonowicza udowodniona w Twierdzeniu 2.14 będzie stanowiła zasadniczy krok w dowodzie domkniętości zbioru rozwiązań inkluzji typu Stratonowicza. Udowodnione poniżej Twierdzenie 2.14 w sposób istotny różni się od Twierdzenia 2.11 pochodzącego z pracy [12], w którym szacowana jest odległość, w sensie metryki Hausdorffa w $\mathcal{H}^2$, wielowartościowych całek typu Stratonowicza z różnych multifunkcji złożonych z jednym procesem. Wynik ten nie był dotąd publikowany.

Definicja 2.12 Niech $F : R^1 \to CComp(R^1)$. Multifunkcja F

(A1) spełnia semimartyngałowy warunek Lipschitza, jeśli istnieje taka stała $L > 0$, że dla każdego $x, y \in \mathcal{H}^2$ i dla każdego $s \in I$

$$H_{R^1}(F(x_s), F(y_s)) \leq L||x - y||_{\mathcal{H}^2}.$$

Uwaga 2.13 Warunek $(A1)$ jest słabszy od warunku Lipschitza w R^1.

Twierdzenie 2.14 *Niech multifunkcja $F : R^1 \to CComp(R^1)$ będzie różniczkowalna w sensie Hukuhary oraz DF będzie pochodną F. Niech $x, \ x^k \in \mathcal{H}^2$ będą procesami postaci $x = \int b_s dW_s + v$ oraz $x^k = \int b_s^k dW_s + v^k$, gdzie $b, \ b^k$ są adaptowalnymi $\mathcal{L}^2$-całkowalnymi procesami oraz $v, \ v^k$ są ciągłymi FV-procesami. Załóżmy, że $F(x_s)$ i $DF(x_s)$ spełniają warunek (A1) ze stałymi L i L_1 odpowiednio oraz że $DF(x_s)$ jest ograniczona.*
Jeśli $\lim_{k\to\infty} ||x - x^k||_{\mathcal{H}^2} = 0$, *to*

$$\lim_{k\to\infty} H_{\mathcal{H}^2}(\int F(x_s) \circ dW_s, \int F(x_s^k) \circ dW_s) = 0.$$

Dowód. Niech $f, \widetilde{f} \in S_{F\bullet x}$, $f^1, \widetilde{f}^1 \in S_{(DF)\bullet x}$ oraz $g \in S_{F\bullet x^k}$ i $g^1 \in S_{(DF)\bullet x^k}$. Ze względu na uproszczenie zapisu w dalszej części dowodu będą stosowane następujące oznaczenia

$$\sup_{f\in S_{F\bullet x},\ f^1\in S_{(DF)\bullet x}} := \sup_{f,f^1},$$

$$\inf_{\widetilde{f}\in S_{F\bullet x},\ \widetilde{f}^1\in S_{(DF)\bullet x}} := \inf_{\widetilde{f},\widetilde{f}^1}$$

$$\text{oraz} \inf_{g\in S_{F\bullet x^k},\ g^1\in S_{(DF)\bullet x^k}} = \inf_{g,g^1}.$$

Niech $\overline{H}$ oznacza półmetrykę Hausdorffa w przestrzeni $\mathcal{H}^2$.
Korzystając z Uwagi 2.6 oraz Własności 1.19 (ii), (iii) otrzymujemy

$$\overline{H}^2_{\mathcal{H}^2}(\int F(x_s)\circ dW_s, \int F(x_s^k)\circ dW_s)$$

$$\leq 2\{\overline{H}^2_{\mathcal{H}^2}(\int F(x_s)\circ dW_s, \int F(x_s)dW_s + \frac{1}{2}\int DF(x_s)b_s^k ds)$$
$$+\overline{H}^2_{\mathcal{H}^2}(\int F(x_s)\circ dW_s + \frac{1}{2}\int DF(x_s)b_s^k ds, \int F(x_s^k)\circ dW_s)\}$$

$$= 2\sup_{z\in\int F(x_s)\circ dW_s} dist^2_{\mathcal{H}^2}(z, \int F(x_s)dW_s + \frac{1}{2}\int DF(x_s)b_s^k ds)$$

$$+2\sup_{u\in(\int F(x_s)dW_s+\frac{1}{2}\int DF(x_s)b_s^k ds)} dist^2_{\mathcal{H}^2}(u, \int F(x_s^k)\circ dW_s)$$

$$= 2\sup_{f,f^1} dist^2_{\mathcal{H}^2}(\int f_s dW_s + \frac{1}{2}\int f_s^1 b_s ds, \int F(x_s)dW_s + \frac{1}{2}\int DF(x_s)b_s^k ds)$$

$$+2\sup_{f,f^1} dist^2_{\mathcal{H}^2}(\int f_s dW_s + \frac{1}{2}\int f_s^1 b_s^k ds, \int F(x_s^k)\circ dW_s)$$

$$= 2\sup_{f,f^1}\inf_{\widetilde{f},\widetilde{f}^1} ||\int(f_s - \widetilde{f}_s)dW_s + \frac{1}{2}\int f_s^1 b_s - \widetilde{f}_s^1 b_s^k ds||^2_{\mathcal{H}^2}$$

$$+2\sup_{f,f^1}\inf_{g,g_1} ||\int(f_s - g_s)dW_s + \frac{1}{2}\int(f_s^1 - g_s^1)b_s^k ds||^2_{\mathcal{H}^2}$$

$$\leq 2\sup_{f,f^1}\{2\inf_{\widetilde{f}}||\int(f_s-\widetilde{f}_s)dW_s||^2_{\mathcal{H}^2}+\frac{1}{2}\inf_{\widetilde{f}^1}||\int f^1_s b_s-\widetilde{f}^1_s b^k_s ds||^2_{\mathcal{H}^2}\}$$

$$+2\sup_{f,f^1}\{2\inf_{g}||\int(f_s-g_s)dW_s||^2_{\mathcal{H}^2}+\frac{1}{2}\inf_{g^1}||\int(f^1_s-g^1_s)b^k_s ds||^2_{\mathcal{H}^2}\}$$

$$=2\sup_{f,f^1}\{2\inf_{\widetilde{f}}E(\int_0^T|f_s-\widetilde{f}_s|^2ds)+\frac{1}{2}\inf_{\widetilde{f}^1}E(\int_0^T|f^1_s b_s-\widetilde{f}^1_s b^k_s|ds)^2\}$$

$$+2\sup_{f,f^1}\{2\inf_{g}E(\int_0^T|f_s-g_s|^2ds)+\frac{1}{2}\inf_{g^1}E(\int_0^T|f^1_s-g^1_s||b^k_s|ds)^2\}.$$

Stosując do drugiego i czwartego składnika powyższej równości nierówność Höldera otrzymujemy

$$\leq 2\sup_{f,f^1}\{2\inf_{\widetilde{f}}E(\int_0^T|f_s-\widetilde{f}_s|^2ds)+\frac{1}{2}T\inf_{\widetilde{f}^1}E(\int_0^T|f^1_s b_s-\widetilde{f}^1_s b^k_s|^2ds)\}$$

$$+2\sup_{f,f^1}\{2\inf_{g}E(\int_0^T|f_s-g_s|^2ds)+\frac{1}{2}T\inf_{g^1}E(\int_0^T|f^1_s-g^1_s|^2|b^k_s|^2ds)\}.$$

Korzystając z Twierdzenia 1.27 (i) powyższe wyrażenie jest równe

$$=2\sup_{f,f^1}\{2E(\int_0^T\inf_{\alpha\in F(x_s)}|f_s-\alpha|^2ds)+\frac{1}{2}TE(\int_0^T\inf_{\beta\in DF(x_s)}|f^1_s b_s-\beta b^k_s|^2ds)\}$$

$$+2\sup_{f,f^1}\{2E(\int_0^T\inf_{\gamma\in F(x^k_s)}|f_s-\gamma|^2ds)+\frac{1}{2}TE(\int_0^T\inf_{\theta\in DF(x^k_s)}|f^1_s-\theta|^2|b^k_s|^2ds)\}$$

$$=2\sup_{f,f^1}\{2E(\int_0^T dist^2_{R^1}(f_s,F(x_s))ds)+\frac{1}{2}TE(\int_0^T dist^2_{R^1}(f^1_s b_s,DF(x_s)b^k_s)ds)\}$$

$$+2\sup_{f,f^1}\{2E(\int_0^T dist^2_{R^1}(f_s,F(x^k_s))ds)+\frac{1}{2}TE(\int_0^T dist^2_{R^1}(f^1_s,DF(x^k_s))|b^k_s|^2ds)\}$$

$$=4\sup_{f}E(\int_0^T dist^2_{R^1}(f_s,F(x_s))ds)+T\sup_{f^1}E(\int_0^T dist^2_{R^1}(f^1_s b_s,DF(x_s)b^k_s)ds)$$

$$+4\sup_{f}E(\int_0^T dist^2_{R^1}(f_s,F(x^k_s))ds)+T\sup_{f^1}E(\int_0^T dist^2_{R^1}(f^1_s,DF(x^k_s))|b^k_s|^2ds).$$

Ponownie na mocy Twierdzenia 1.27 (ii) zastosowanego do ostatniej równości uzyskujemy

$$= 4E(\int_0^T \sup_{\eta\in F(x_s)} dist^2_{R^1}(\eta, F(x_s))ds) + TE(\int_0^T \sup_{\zeta\in DF(x_s)} dist^2_{R^1}(\zeta b_s, DF(x_s)b_s^k)ds)$$

$$+4E(\int_0^T \sup_{\eta\in F(x_s)} dist^2_{R^1}(\eta, F(x_s^k))ds) + TE(\int_0^T \sup_{\zeta\in DF(x_s)} dist^2_{R^1}(\zeta, DF(x_s^k))|b_s^k|^2ds)$$

$$\leq TE(\int_0^T H^2_{R^1}(DF(x_s)b_s, DF(x_s)b_s^k)ds) + 4E(\int_0^T H^2_{R^1}(F(x_s), F(x_s^k))ds)$$

$$+TE(\int_0^T H^2_{R^1}(DF(x_s), DF(x_s^k))|b_s^k|^2ds).$$

Stosując do pierwszego składnika Własność 1.19 (iv) i warunek (A1) do składników drugiego i trzeciego otrzymujemy

$$\leq TE\int_0^T (max\{b_s, b_s^k\}H^2_{R^1}(DF(x_s), DF(x_s)) + 2H^2_{R^1}(DF(x_s), \{0\})|b_s - b_s^k|^2)ds$$

$$+4E\int_0^T L^2||x - x^k||^2_{\mathcal{H}^2}ds + TE\int_0^T L_1^2||x - x^k||^2_{\mathcal{H}^2}|b_s^k|^2ds$$

$$= 2TH^2_{R^1}(DF(x_s), \{0\})E\int_0^T |b_s - b_s^k|^2ds$$

$$+4TL^2||x - x^k||^2_{\mathcal{H}^2} + TL_1^2||x - x^k||^2_{\mathcal{H}^2}E\int_0^T |b_s^k|^2ds.$$

Pokażemy teraz, że jeśli $\lim_{k\to\infty}||x - x^k||^2_{\mathcal{H}^2} = 0$, to $\lim_{k\to\infty} E\int_0^T |b_s - b_s^k|^2ds = 0$. Rzeczywiście,

$$0 = \lim_{k\to\infty}||x - x^k||^2_{\mathcal{H}^2} = \lim_{k\to\infty}||\int(b_\tau - b_\tau^k)dW_\tau + (v - v^k)||^2_{\mathcal{H}^2}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\{||[\int(b_\tau - b_\tau^k)dW_\tau, \int(b_\tau - b_\tau^k)dW_\tau]_T^{\frac{1}{2}}||_{L^2(\Omega)} + ||\int_0^T |d(v - v^k)_\tau| \ ||_{L^2(\Omega)}\}.$$

Stosując do pierwszego składnika powyższej równości Twierdzenie 1.14 uzyskujemy

$$= \lim_{k\to\infty}\{||(\int_0^T (b_\tau - b_\tau^k)^2d\tau)^{\frac{1}{2}}||_{L^2(\Omega)} + ||\int_0^T |d(v - v^k)_\tau| \ ||_{L^2(\Omega)}\}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \{(E\int_0^T |b_\tau - b_\tau^k|^2 d\tau)^{\frac{1}{2}} + (E(\int_0^T |d(v-v^k)_\tau|)^2)^{\frac{1}{2}}\}.$$

Ponieważ $H_{R^1}((DF)(x_s), \{0\})$ jest ograniczone, a ciąg (b^k) jest zbieżny w $L^2(I\times\Omega)$, więc

$$\lim_{k\to\infty} \overline{H}^2_{\mathcal{H}^2}(\int F(x_s)\circ dW_s, \int F(x_s^k)\circ dW_s) = 0.$$

Podobnie pokazujemy, że

$$\lim_{k\to\infty} \overline{H}^2_{\mathcal{H}^2}(\int F(x_s^k)\circ dW_s, \int F(x_s)\circ dW_s) = 0,$$

co kończy dowód twierdzenia.

■

ROZDZIAŁ III

Stochastyczna inkluzja różniczkowa typu Stratonowicza względem procesu Wienera

W rozdziale tym podana zostanie definicja rozwiązania inkluzji (SI) względem wielowartościowej całki typu Stratonowicza zdefiniowanej w rozdziale drugim oraz zbadane będą własności zbioru rozwiązań inkluzji (SI).

3.1. Definicja mocnego rozwiązania inkluzji

Niech dany będzie skończony przedział czasowy $I = [0, T]$ oraz zupełna przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_s)_{s\in I}, P)$ z filtracją, spełniającą założenia zawarte w Rozdziale 1.1. Niech multifunkcja $F : R^1 \to CComp(R^1)$ będzie różniczkowalna w sensie Hukuhary oraz niech W będzie procesem Wienera zgodnym z filtracją $(\mathcal{F}_s)_{s\in I}$.

Definicja 3.1 Niech

$$\text{(SI)} \qquad dx_t \in F(x_t) \circ dW_t, \quad x_0 = \xi$$

oznacza inkluzję stochastyczną typu Stratonowicza względem procesu Wienera. Ciągły semimartyngał $x \in \mathcal{H}^2$ nazywany jest *mocnym rozwiązaniem* inkluzji (SI), zwanym dalej rozwiązaniem, jeśli dla każdego $s, t \in I$, $s < t$ zachodzi

$$x_t - x_s \in cl_{L^2(\Omega)}(\int_s^t F(x_\tau) \circ dW_\tau) \text{ oraz } x_0 = \xi$$

lub równoważnie

$$x_t - x_s \in cl_{L^2(\Omega)}(\int_s^t F(x_\tau) dW_\tau + \frac{1}{2}\int_s^t (DF)(x_\tau) d[x, W]_\tau) \text{ oraz } x_0 = \xi.$$

Wielowartościowe całki stochastyczne występujące w powyższych formułach zdefiniowane zostały w Rozdziale 2.1.

Symbolem $I(\xi)$ oznaczany będzie *zbiór wszystkich rozwiązań inkluzji* (SI) z warunkiem początkowym $x_0 = \xi$, gdzie $\xi \in \mathcal{F}_0$.

3.2. Istnienie i własności zbioru mocnych rozwiązań inkluzji

Niech dana będzie zupełna przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_s)_{s\in I}, P)$ z filtracją, spełniającą założenia zawarte w Rozdziale 1.1.

Definicja 3.2 ([26]) Niech $\mathcal{D}$ oznacza przestrzeń wszystkich funkcji $h : R^1 \to R^1$ prawostronnie ciągłych ze skończonymi lewostronnymi granicami. Funkcja $f : R^1 \to R^1$ jest klasy $\mathcal{AD}$, jeśli f jest absolutnie ciągła i jej pochodna f' posiada wersję cádlág, to znaczy $f' = h$ prawie wszędzie, dla pewnego $h \in \mathcal{D}$.

Własność 3.3 ([26]) *Jeśli $f : R^1 \to R^1$ jest klasy $\mathcal{AD}$ oraz x i y są ciągłymi semimartyngałami, to $[f(x), y] = \int f'(x_s)d[x, y]_s$.*

W powyższym przypadku proces wahania kwadratowego $[f(x), y]$ istnieje mimo, że $f(x)$ nie jest semimartyngałem.

Definicja 3.4 Proces x nazywany jest *minimalnym rozwiązaniem* stochastycznego równania, jeśli każde inne rozwiązanie y równania spełnia $x_t \le y_t$ dla każdego $t \in I$ prawie na pewno.

Poniższa wersja twierdzenia J. San Martina będzie wykorzystana w dowodzie istnienia rozwiązań inkluzji (SI).

Twierdzenie 3.5 (Theorem 4.14, [37]) *Niech z będzie ciągłym semimartyngałem, funkcja $f \in \mathcal{AD}$ oraz niech spełnione będzie założenie, że jeżeli f' jest funkcją cádlág, to* $\sup_{x\in R^1} |f'(x)| < \infty$. *Wtedy równanie Stratonowicza*

$$dx_t = f(x_t) \circ dz_t = f(x_t)dz_t + \frac{1}{2}f'(x_t)d[x, z]_t, \quad x_0 = \xi \in \mathcal{F}_0 \tag{7}$$

ma jednoznaczne mocne rozwiązanie minimalne $\underline{x}$.

Twierdzenie 3.6 *Jeżeli multifunkcja $F : R^1 \to CComp(R^1)$ jest różniczkowalna w sensie Hukuhary oraz jej pochodna DF jest ograniczoną dolnie półciągłą multifunkcją, to istnieje rozwiązanie inkluzji (SI).*

Dowód. Na mocy Twierdzenia 1.28 dolnie półciągła multifunkcja DF o wypukłych wartościach posiada ciągłą selekcję g. Z założenia ograniczoności pochodnej Hukuhary funkcja g jest ograniczona. Oznaczmy przez $f(t) = \int_0^t g(u)du$. Wtedy f jest ciągłym selektorem multifunkcji F. Ponieważ funkcja f jest ciągła i różniczkowalna prawie wszędzie oraz jej pochodna $f' = g$ jest funkcją ciągłą, więc zgodnie z Definicją 3.2 f jest funkcją klasy $\mathcal{AD}$. Na mocy Twierdzenia 3.5, biorąc $z = W$, wnioskujemy, że równanie

$$dx_t = f(x_t)dW_t + \frac{1}{2}g(x_t)d[x,W]_t = f(x_t)dW_t + \frac{1}{2}f'(x_t)d[x,W]_t$$

ma jednoznaczne mocne rozwiązanie minimalne $\underline{x}$. Ponieważ f i g są selektorami multifunkcji F i DF odpowiednio, więc $(f \bullet \underline{x}) \in S_{F\bullet\underline{x}}$ i $(g \bullet \underline{x}) \in S_{(DF)\bullet\underline{x}}$. Proces $\underline{x}$ postaci

$$\underline{x}_t = \xi + \int_0^t \widetilde{f}_\tau dW_\tau + \frac{1}{2}\int_0^t \widetilde{g}_\tau d[\underline{x},W]_\tau \quad p.n., \tag{8}$$

gdzie $\xi \in \mathcal{F}_0$, $\widetilde{f} = (f \bullet \underline{x}) \in S_{F\bullet\underline{x}}$ oraz $\widetilde{g} = (g \bullet \underline{x}) \in S_{(DF)\bullet\underline{x}}$, można przedstawić jako

$$\underline{x}_t - \underline{x}_s = \int_s^t \widetilde{f}_\tau dW_\tau + \frac{1}{2}\int_s^t \widetilde{g}_\tau d[\underline{x},W]_\tau \in \int_s^t F(\underline{x}_\tau) \circ dW_\tau,$$

dla $s,t \in I, \quad s < t$. Oznacza to, że proces $\underline{x}$ jest rozwiązaniem inkluzji (SI).

■

Własność domkniętości zbioru rozwiązań będzie udowodniona przy dodatkowym założeniu, które mówi o tym, że rozwiązania inkluzji (SI) mają następującą postać

$$x_t = \int_0^t b_s dW_s + v_t, \tag{9}$$

gdzie b są adaptowalnymi, $\mathcal{L}^2$-całkowalnymi procesami oraz v są ciągłymi FV-procesami. W dowodzie domkniętości zbioru rozwiązań korzysta się z Twierdzenia 2.14, które zostało pokazane tylko dla procesów takiej postaci. Każde rozwiązanie równania Stratonowicza jest procesem postaci (9), ale nie każde rozwiązanie inkluzji (SI) musi być procesem takiej postaci. Dlatego też, aby udowodnić domkniętość zbioru rozwiązań wprowadzamy dodatkowe założenie, dzięki któremu rozwiązania inkluzji (SI) są procesami postaci (9).

Definicja 3.7 ([36]) Niech $W = (W_t)_{t\in I}$ będzie procesem Wienera. Symbolem $(\mathcal{F}_t^W)_{t\in I}$ oznaczana będzie *filtracja naturalna* generowana przez proces Wienera, gdzie $\mathcal{F}_t^W = \sigma\{W_s : \quad s \leq t\}$. Filtracja naturalna jest najmniejszą filtracją, względem której proces Wienera jest adaptowalny.

Filtracja naturalna nazywana jest *zupełną,* jeżeli zawiera ona wszystkie zbiory miary zero z $\mathcal{F}$.

Własność 3.8 (Corollary 1, p.156, [36]) *Niech $(\mathcal{F}_t^W)_{t\in I}$ będzie filtracją naturalną i zupełną generowaną przez proces Wienera. Wtedy każdy lokalny martyngał m względem filtracji $(\mathcal{F}_t^W)_{t\in I}$ jest ciągły.*

Własność 3.9 (Corollary 2, p.156, [36]) *Niech $W = (W_s)_{s\in I}$ będzie procesem Wienera oraz niech $(\mathcal{F}_t^W)_{t\in I}$ będzie jego filtracją naturalną i zupełną. Wtedy każdy lokalny martyngał względem tej filtracji ma reprezentację*

$$m_t = m_0 + \int_0^t b_s dW_s,$$

gdzie b jest procesem przewidywalnym i całkowalnym względem procesu Wienera.

Rozpatrzmy inkluzję (SI) na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^W)_{t\in I}, P)$ z filtracją naturalną i zupełną wyznaczoną przez proces Wienera $W = (W_s)_{s\in I}$. Wówczas na mocy Definicji 1.8, Własności 3.8 oraz Własności 3.9 wnioskujemy, że każdy ciągły semimartyngał x określony na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^W)_{t\in I}, P)$ ma reprezentację

$$x_t = m_t + u_t = \int_0^t b_s dW_s + v_t,$$

gdzie b jest $(\mathcal{F}_t^W)_{t\in I}$-adaptowalnym, $\mathcal{L}^2$-całkowalnym procesem oraz $v = u + m_0$ jest pewnym ciągłym FV-procesem.

Uwaga 3.10 Twierdzenie 3.6, o niepustości zbioru rozwiązań inkluzji (SI) udowodnione zostało dla bardziej ogólnego przypadku. Rozwiązania inkluzji (SI) istnieją na zupełnej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_s)_{s\in I}, P)$ z dowolną filtracją, spełniającą założenia zawarte w Rozdziale 1.1.

Twierdzenie 3.11, o domkniętości zbioru rozwiązań, wymaga aby rozwiązania inkluzji (SI) były postaci (9), to znaczy były określone na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^W)_{t\in I}, P)$ z filtracją generowaną przez proces Wienera.

Twierdzenie 3.11 *Niech multifunkcja $F : R^1 \to CComp(R^1)$ będzie różniczkowalna w sensie Hukuhary oraz jej pochodna DF będzie dolnie półciągłą multifunkcją. Załóżmy, że $F(x_s)$ i $DF(x_s)$ spełniają (A1) oraz $DF(x_s)$ jest ograniczona. Wtedy zbiór rozwiązań $I(\xi)$ inkluzji (SI) na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^W)_{t\in I}, P)$ jest zbiorem domkniętym w przestrzeni $\mathcal{H}^2$ rozpatrywanej z filtracją $(\mathcal{F}_t^W)_{t\in I}$.*

Dowód. Niech $\{x^k\}_{k\geq 1}$ będzie ciągiem rozwiązań inkluzji (SI) zbieżnym w $\mathcal{H}^2$ do pewnego semimartyngału $x \in \mathcal{H}^2$. W celu udowodnienia domkniętości zbioru rozwiązań należy pokazać, że

1° graniczny proces x jest ciągłym semimartyngałem,

2° proces x spełnia warunek $x_t - x_s \in cl_{L^2(\Omega)}(\int_s^t F(x_\tau) \circ dW_\tau)$ oraz $x_0 = \xi$ dla każdego $t, s \in I, \quad s < t$.

Ciągłość semimartyngału x wynika z ciągłości semimartyngałów x^k oraz Własności 1.15 ponieważ mamy

$$(10) \qquad || \sup_{t\in I} |x_t - x_t^k| \; ||_{L^2(\Omega)} = ||x - x^k||_{S^2} \leq 2\sqrt{2}||x - x^k||_{\mathcal{H}^2} \to 0,$$

przy $k \to \infty$. Zatem istnieje podciąg ciągu $\{x^k\}$, oznaczany tym samym symbolem, zbieżny do x prawie na pewno jednostajnie względem $t \in I$. Ponieważ x^k jako rozwiązania inkluzji (SI) są na podstawie Definicji 3.1 ciągłymi semimartyngałami, a zbieżność jest jednostajna względem $t \in I$, więc graniczny proces x ma prawie wszystkie trajektorie ciągłe.

W celu udowodnienia 2° należy pokazać, że

$$\lim_{k\to\infty} H_{L^2(\Omega)}(\int_s^t F(x_\tau^k) \circ dW_\tau, \int_s^t F(x_\tau) \circ dW_\tau) = 0.$$

Przyjmijmy następujące oznaczenia

$$B := \int_s^t F(x_\tau^k) dW_\tau, \quad C := \int_s^t F(x_\tau) dW_\tau$$

oraz

$$B' := \frac{1}{2}\int_s^t (DF)(x_\tau^k) d[x,W]_\tau, \quad C' := \frac{1}{2}\int_s^t (DF)(x_\tau) d[x,W]_\tau.$$

Wtedy z Własności 1.19 (ii) otrzymujemy

$$H_{L^2(\Omega)}(B + B', C + C') \leq H_{L^2(\Omega)}(B, C) + H_{L^2(\Omega)}(B', C').$$

Niech $\overline{H}$ oznacza półmetrykę Hausdorffa w przestrzeni $L^2(\Omega)$.

Wówczas z definicji półmetryki Hausdorffa mamy

$$\overline{H}_{L^2(\Omega)}(B, C) = \sup_{f \in S_{F \bullet x^k}} \inf_{f^1 \in S_{F\bullet x}} || \int_s^t f_\tau dW_\tau - \int_s^t f_\tau^1 dW_\tau ||_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq \sup_{f \in S_{F \bullet x^k}} \inf_{f^1 \in S_{F\bullet x}} \{|| \int_0^t (f_\tau - f_\tau^1) dW_\tau ||_{L^2(\Omega)} + || \int_0^s (f_\tau - f_\tau^1) dW_\tau ||_{L^2(\Omega)}\}$$

$$\leq \sup_{f \in S_{F \bullet x^k}} \inf_{f^1 \in S_{F\bullet x}} \{|| \sup_{t\in I} \int_0^t (f_\tau - f_\tau^1) dW_\tau ||_{L^2(\Omega)} + || \sup_{s\in I} \int_0^s (f_\tau - f_\tau^1) dW_\tau ||_{L^2(\Omega)}\}.$$

Korzystając z (10) powyższą nierówność można oszacować jako

$$\leq \sup_{f \in S_{F \bullet x^k}} \inf_{f^1 \in S_{F\bullet x}} \{2\sqrt{2} || \int (f_\tau - f_\tau^1) dW_\tau ||_{\mathcal{H}^2} + 2\sqrt{2} || \int (f_\tau - f_\tau^1) dW_\tau ||_{\mathcal{H}^2}\}$$

$$= 4\sqrt{2}\ \ \overline{H}_{\mathcal{H}^2}(\int F(x^k_\tau)dW_\tau, \int F(x_\tau)dW_\tau) \leq 4\sqrt{2}\ \ H_{\mathcal{H}^2}(B,C).$$

Podobne oszacowania uzyskujemy dla $\overline{H}_{L^2(\Omega)}(C,B)$, $\overline{H}_{L^2(\Omega)}(B',C')$ oraz $\overline{H}_{L^2(\Omega)}(C',B')$. Z Własności 3.8 wynika, że dla każdego $k \geq 1$ procesy x^k oraz x mają reprezentacje $x^k = \int b^k_\tau dW_\tau + v^k$ oraz $x = \int b_\tau dW_\tau + v$. Ponieważ spełnione są założenia Twierdzenia 2.14, więc

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} H_{\mathcal{H}^2}(\int F(x^k_\tau)\circ dW_\tau, \int F(x_\tau)\circ dW_\tau) = 0.$$

Stąd

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} H_{L^2(\Omega)}(\int_s^t F(x^k_\tau)\circ dW_\tau, \int_s^t F(x_\tau)\circ dW_\tau) = 0.$$

Dla każdego $k \geq 1$ oraz dla każdego $s < t$ mamy

$$dist_{L^2(\Omega)}(x_t - x_s, \int_s^t F(x_\tau)\circ dW_\tau)$$

$$\leq ||(x_t - x^k_t) - (x_s - x^k_s)||_{L^2(\Omega)} + dist_{L^2(\Omega)}(x^k_t - x^k_s, \int_s^t F(x^k_\tau)\circ dW_\tau)$$

$$+ H_{L^2(\Omega)}(\int_s^t F(x^k_\tau)\circ dW_\tau, \int_s^t F(x_\tau)\circ dW_\tau).$$

Przechodząc w powyższej nierówności do granicy, przy $k \to \infty$, otrzymujemy

$$dist_{L^2(\Omega)}(x_t - x_s, \int_s^t F(x_\tau)\circ dW_\tau) = 0.$$

Oznacza to, że $x_t - x_s \in cl_{L^2(\Omega)}(\int_s^t F(x_\tau)\circ dW_\tau)$ dla każdego $s,t \in I$, co kończy dowód.

$\blacksquare$

ROZDZIAŁ IV

Inkluzje stochastyczne typu Stratonowicza względem semimartyngału

Rozdział ten jest poświęcony badaniu istnienia mocnych rozwiązań inkluzji (SII). W tym celu zaprezentowane będą własności górnie oddzielanych i maksymalnie monotonicznych multifunkcji oraz zdefiniowane będą dla nich wielowartościowe całki niezbędne do badania inkluzji (SII). Inkluzje te są rozważane dla klasy multifunkcji, które nie muszą być różniczkowalne w sensie Hukuhary.

4.1. Multifunkcje górnie oddzielane i maksymalnie monotoniczne

Definicja 4.1 (Definition 3.2, [30]) Niech F będzie multifunkcją działającą z R^1 do niepustych podzbiorów R^1. U_F (L_F) nazywane jest górnym (dolnym) ograniczeniem multifunkcji F, jeśli

$$U_F : R^1 \to R^1, \quad U_F(t) = \sup_{b_1 \in F(t)} b_1$$

$$L_F : R^1 \to R^1, \quad L_F(t) = \inf_{b_2 \in F(t)} b_2.$$

Multifunkcja F nazywana jest *górnie oddzielaną,* jeśli dla każdego t i $\epsilon > 0$ istnieje hiperpłaszczyzna $H_{t,\epsilon}$ silnie oddzielająca punkt $(t, L_F(t) - \epsilon)$ od zbioru $Epi(U_F) = \{(t, b) \in R^1 \times R^1 : \quad U_F(t) \leq b\}$.

Zaprezentowane poniżej własności będą wykorzystane w dowodach twierdzeń zawartych w tym rozdziale.

Własność 4.2 (Proposition 3.4, [30]) *Niech $F : R^1 \to Conv(R^1)$. Jeżeli F jest górnie oddzielana, to posiada wypukły i dolnie półciągły selektor.*

Własność 4.3 (Proposition 1.19, [35]) *Niech D oznacza niepusty, otwarty i wypukły podzbiór R^n. Jeżeli funkcja $f : D \to R^1$ jest wypukła, to jest ona ciągła w każdym punkcie zbioru D.*

Własność 4.4 (Proposition 1.6, [35]) *Niech D oznacza niepusty, otwarty i wypukły podzbiór R^n. Jeżeli funkcja wypukła $f : D \to R^1$ jest ciągła w punkcie $t_0 \in D$, to spełnia ona lokalny warunek Lipschitza w tym punkcie.*

Własność 4.5 (Theorem 1.16, [35]) *Niech D oznacza otwarty podprzedział R^1. Jeżeli funkcja $f : D \to R^1$ jest wypukła, to pochodna $f'(t)$ istnieje dla co najwyżej przeliczalnie wielu punktów należących do przedziału D.*

Twierdzenie 4.6 *Górnie oddzielana multifunkcja $F : R^1 \to CComp(R^1)$ posiada wypukły selektor, który spełnia lokalny warunek Lipschitza.*

Dowód. Na mocy Własności 4.2 górnie oddzielana multifunkcja F posiada wypukły selektor $f : R^1 \to R^1$. Ponadto korzystając z Własności 4.3 selektor f jest również funkcją ciągłą. Ponieważ funkcja f jest wypukła i ciągła, więc na podstawie Własności 4.4 spełnia ona lokalny warunek Lipschitza.

■

Lemat 4.7 (Lemma 2.2, [37]) *Następujące warunki są równoważne:*

(a) $f \in \mathcal{AD}$,

(b) f jest ciągła, a jej prawostronna pochodna $f'^{+}(t) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$ istnieje we wszystkich punktach i jest funkcją cádlág.

Twierdzenie 4.8 *Jeżeli multifunkcja $F : R^1 \to CComp(R^1)$ jest górnie oddzielana, to posiada selektor $f \in \mathcal{AD}$.*

Dowód. Na mocy Lematu 4.7 wystarczy pokazać, że f jest funkcją ciągłą, a jej prawostronna pochodna jest funkcją cádlág. Zauważmy, że górnie oddzielana multifunkcja F posiada wypukły i ciągły selektor f. Z wypukłości selektora f, na podstawie Własności 4.5, wnioskujemy że prawostronna pochodna f jest funkcją cádlág.

■

Poniższy przykład pokazuje, że własność górnego oddzielania istotnie różni się od klasycznych warunków rozważanych w teorii inkluzji różniczkowych i stochastycznych inkluzji różniczkowych.

Przykład 4.9 Niech B będzie takim podzbiorem przedziału $[0,1]$, że $\mu(B) = \frac{1}{2}$ oraz dla każdego przedziału $[a,b] \subset [0,1]$ zachodzi $0 < \mu(B \cap [a,b]) < b-a$. Wówczas miara zbioru $B' = [0,1] \setminus B$ wynosi $\frac{1}{2}$ oraz spełnione jest $0 < \mu(B' \cap [a,b]) < b-a$. Zauważmy, że zbiory B i B' są gęste w $[0,1]$. Zdefiniujmy w następujący sposób multifunkcję $F : [0,1] \to 2^{R^1}$

$$F(t) = \begin{cases} [1, e^{|t|}+3], & t \in B \\ [2, e^{|t|}+5], & t \in ([0,1] \setminus B) \end{cases}$$

Zauważmy, że multifunkcja F nie spełnia warunku Lipschitza, nie jest dolnie półciągła, ani górnie półciągła w żadnym punkcie. Nie spełnia również żadnego warunku monotoniczności. Określmy dla multifunkcji F

$$\delta(t) := diam F(t) = \begin{cases} e^{|t|}+2, & t \in B \\ e^{|t|}+3, & t \in ([0,1] \setminus B) \end{cases}$$

Ponieważ funkcja $t \to \delta(t)$ nie jest niemalejąca na żadnym otwartym podzbiorze $[0,1]$, więc na mocy Własności 4.1 z pracy [5] multifunkcja F nie jest różniczkowalna w sensie Hukuhary w żadnym punkcie przedziału $[0,1]$. Natomiast multifunkcja F jest górnie oddzielana.

Definicja 4.10 Multifunkcja $A : R^1 \to 2^{R^1}$ nazywana jest *maksymalnie monotoniczną,* jeśli

$$\forall s,t \in I \;\; \forall u \in A(s), v \in A(t) \;\; (u-v)(s-t) \geq 0 \;\text{ oraz Range}(Id + A) = R^1,$$

gdzie Id oznacza operator identyczności. Symbolem $\widehat{A}(t)$ oznaczany będzie element o minimalnej normie ze zbioru $A(t)$.

4.2. Wielowartościowe całki stochastyczne

Niech dany będzie przedział $I = [0,T]$ oraz zupełna przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_s\}_{s\in I}, P)$ z filtracją, spełniającą założenia zawarte w Rozdziale 1.1.

Definicja 4.11 W całym rozdziale czwartym stochastyczny proces x nazywany jest *semimartyngałem* jeśli można przedstawić go w postaci sumy $x = m+v$, gdzie m jest lokalnym martyngałem, natomiast v jest FV-procesem.

Definicja 4.12 Niech $G : R^1 \to CComp(R^1)$. Dla semimartyngału x oraz FV-procesu "a" symbolem $\mathcal{S}_{G\bullet x}$ oznaczany będzie zbiór wszystkich a-całkowalnych selektorów ze złożenia $G \bullet x$

$$\mathcal{S}_{G\bullet x} := \{h : h_s \in G(x_s), \quad s \in I, \quad p.n.,$$

$$\text{i } \int_0^t |h_s||da_s| < \infty \text{ dla każdego } t \in I \quad p.n.\}.$$

Jeśli zbiór selektorów $\mathcal{S}_{G\bullet x}$ jest niepusty, to *wielowartościowa całka ze złożenia multifunkcji G i semimartyngału x* definiowana jest jako zbiór

$$\int_0^t G(x_s)da_s = \{\int_0^t h_s da_s : h \in \mathcal{S}_{G\bullet x}\}.$$

Uwaga 4.13 Jeśli multifunkcja G jest górnie oddzielana, x jest ciągłym semimartyngałem i "a" jest ciągłym FV-procesem, to na mocy Twierdzenia 4.6 zbiór selektorów $\mathcal{S}_{G\bullet x}$ jest niepusty.

Niech x będzie ciągłym semimartyngałem oraz $A : R^1 \to 2^{R^1}$ niech będzie maksymalnie monotoniczną multifunkcją.

Uwaga 4.14 Niech z będzie ciągłym semimartyngałem. Jeśli $h_s = \widehat{A}(x_s)$ jest złożeniem niemalejącej funkcji $\widehat{A}(\cdot)$, określonej w Definicji 4.10, z procesem ciągłym x na przedziale I, przy każdym ustalonym $\omega \in \Omega$, to h_s jest mierzalnym i ograniczonym procesem. Oznacza to, że zbiór

$$\mathcal{S}_{A\bullet x} := \{h : h_s \in A(x_s), \quad s \in I, \quad p.n.,$$
$$\text{i } \int_0^t |h_s| d[z,z]_s < \infty \text{ dla każdego } t \in I \quad p.n.\}$$

jest niepusty.

Uwaga 4.15 Jednowartościowa całka Stratonowicza z semimartyngału h względem ciągłego semimartyngału z definiowana jako

$$\int_0^t h_s \circ dz_s = \int_0^t h_{s-} dz_s + \frac{1}{2}[h,z]_t^c,$$

istnieje, gdzie $[h,z]_t^c$ oznacza ciągłą część procesu wahania kwadratowego $[h,z]$.

Wielowartościową całkę typu Stratonowicza definiujemy następująco:

Definicja 4.16 Niech $F : R^1 \to CComp(R^1)$. Dla ciągłego semimartyngału x symbolem $\mathcal{S}_{F\bullet x}$ oznaczany będzie zbiór selektorów $F \bullet x$ całkowalnych w sensie Stratonowicza, to znaczy

$$\mathcal{S}_{F\bullet x} = \{h : h_s \in F(x_s), \quad s \in I, \quad p.n.,$$
$$\text{i } \int_0^t h_s \circ dz_s < \infty \text{ dla każdego } t \in I \quad p.n.\}.$$

Jeśli zbiór $\mathcal{S}_{F\bullet x}$ jest niepusty, to wielowartościowa całka definiowana jest jako

$$\int_0^t F(x_s) \circ dz_s = \{\int_0^t h_s \circ dz_s : \quad h \in \mathcal{S}_{F\bullet x}\}.$$

Uwaga 4.17 Zauważmy, że na mocy Twierdzenia 4.6 górnie oddzielana multifunkcja F posiada wypukły selektor f. Wówczas z własności funkcji wypukłych, na podstawie Twierdzenia IV.47 [36], $h_s = f(x_s)$ jest również semimartyngałem. Z Uwagi 4.15 zbiór $\mathcal{S}_{F\bullet x}$ jest niepusty, a zatem całka $\int_0^t F(x_s) \circ dz_s$ jest poprawnie zdefiniowana.

4.3. Twierdzenie o istnieniu mocnych rozwiązań inkluzji

Niech dane będą górnie oddzielane multifunkcje $F, G : R^1 \to CComp(R^1)$ i maksymalnie monotoniczna multifunkcja $A : R^1 \to Conv(R^1)$. Załóżmy, że x i z są ciągłymi semimartyngałami, "a" jest ciągłym FV-procesem oraz $x_0 = \xi \in \mathcal{F}_0$. Niech $[z, z]$ będzie procesem wahania kwadratowego ciągłego semimartyngału z. Dla zdefiniowanych w poprzednim paragrafie wielowartościowych całek określimy rozwiązanie inkluzji (SII).

Definicja 4.18 Czas zatrzymania $\widetilde{T}$ nazywany jest *czasem eksplozji* dla procesu x, jeśli x jest rozwiązaniem inkluzji na przedziale $[0, \widetilde{T})$, $x_{\widetilde{T}} = +\infty$ P.1 na $\{\widetilde{T} \leq T\}$ oraz $\widetilde{T} = \lim_{n\to\infty} T^n$, gdzie
$T^n := \inf\{t \in [0, T] : \ |x_t| > n\}, \ \text{dla} \ n \geq 1.$

Jeśli $P(\widetilde{T} > T) = 1$, to proces x jest nieeksplodującym rozwiązaniem inkluzji.

Definicja 4.19 Niech dana będzie inkluzja stochastyczna typu Stratonowicza

(SII) $dx_t \in F(x_t) \circ dz_t + G(x_t)da_t - A(x_t)d[z, z]_t, \quad x_0 = \xi.$

Ciągły semimartyngał x nazywany jest *mocnym rozwiązaniem* inkluzji (SII), zwanym dalej rozwiązaniem, aż do czasu eksplozji $\widetilde{T} \leq T$, jeśli istnieją $f \in \mathcal{S}_{F\bullet x}, \ g \in \mathcal{S}_{G\bullet x}, \quad h \in \mathcal{S}_{A\bullet x}$ takie, że

$$x_t = \xi + \int_0^t f_s dz_s + \frac{1}{2}[f, z]_t + \int_0^t g_s da_s - \int_0^t h_s d[z, z]_s$$

dla każdego $t \in [0, \widetilde{T}]$ prawie na pewno.

Górnie oddzielane multifunkcje nie muszą spełniać liniowego warunku wzrostu. Zatem rozwiązania inkluzji (SII) mogą mieć eksplozje.

Przedstawione poniżej pojęcia i lematy będą wykorzystane w dowodzie Twierdzenia 4.25, zasadniczego wyniku tego rozdziału.

Definicja 4.20 Ciąg procesów $(x^n)_{n\geq 1}$ jest *zbieżny w sensie ucp* do procesu x, jeśli dla każdego $t \in I$ ciąg $\sup_{0\leq s\leq t} |x^n_s - x_s|$ jest zbieżny według prawdopodobieństwa do zera.

Twierdzenie 4.21 (Dominated Convergence Theorem, [36]) *Niech x będzie semimartyngałem oraz niech ciąg przewidywalnych procesów f^n będzie zbieżny prawie na pewno do procesu f. Jeśli istnieje proces g całkowalny względem semimartyngału x taki, że $|f^n| \leq g$ dla każdego n, to procesy f^n, f też są całkowalne względem semimartyngału x oraz całki $\int f^n_s dx_s$ są zbieżne w sensie ucp do całki $\int f_s dx_s$.*

Definicja 4.22 ([6]) Niech $f, g : R^1 \to R^1$ będą dowolnymi funkcjami. Mówimy, że $f <^* g$, jeśli dla każdego x istnieje taka $\delta > 0$, że jeśli $|p - q| < \delta$ i $|p - q'| < \delta$, to $f(q) \leq g(q')$.

Lemat 4.23 (Lemma 4.6, [37]) *Niech m będzie ciągłym lokalnym martyngałem i niech "a" będzie ciągłym, FV-procesem. Załóżmy, że lokalnie ograniczona funkcja $f : R^1 \to R^1$ spełnia warunek*

dla każdego zwartego podzbioru $\Lambda \subset R^1$

$$\sup_{(p,q)\in\Lambda\times\Lambda,\ \ p\neq q} \frac{|f(p) - f(q)|}{|p - q|} < \infty.$$

Niech lokalnie ograniczone funkcje h_1 i h_2 spełniają warunek $h_1 <^* h_2$. Jeśli procesy $x^i, i = 1, 2$ są rozwiązaniami równania

$$x^i_t = \xi + \int_0^t f(x^i_s)dm_s + \int_0^t h^i(x^i_s)da_s,$$

to $x^1_t \leq x^2_t$ dla każdego $t \in I$ prawie na pewno.

Lemat 4.24 (Lemma 4.12, [37]) *Niech $h : R^1 \to R^1$ będzie dolnie półciągłą funkcją ograniczoną przez stałą M.*
Jeśli $h^n(p) = \inf_q\{h(q) + n|p - q|\} - \frac{1}{2^n}$, to

1° $\forall p, n \ \ |h^n(p)| \leq M+1$,

2° $h^n(p) \nearrow h(p)$,

3° $\forall p, q \ \ |h^n(p) - h^n(q)| \leq n|p-q|$,

4° $h^n <^* h^{n+1}$,

5° *Jeśli h jest ciągła w punkcie p oraz $p^n \to p$, to $h^n(p^n) \to h(p)$.*

Twierdzenie 4.25 *Niech z będzie ciągłym semimartyngałem, $[z, z]$ niech będzie procesem wahania kwadratowego dla semimartyngału z oraz niech "a" będzie ciągłym FV-procesem. Niech multifunkcje $F, G : R^1 \to CComp(R^1)$ będą górnie oddzielane oraz multifunkcja $A : R^1 \to Conv(R^1)$ jest maksymalnie monotoniczna. Wówczas istnieje rozwiązanie, aż do czasu eksplozji inkluzji stochastycznej typu Stratonowicza (SII).*

Dowód. KROK 1: Na mocy Twierdzenia 4.6 istnieją wypukłe i ciągłe selektory f i g górnie oddzielanych multifunkcji F i G odpowiednio. Ponadto z Twiedzenia 4.8 wiemy, że $f \in \mathcal{AD}$. Ponieważ dla maksymalnie monotonicznej multifunkcji A i dla każdego p zbiór $A(p)$ jest domknięty i wypukły, więc istnieje jednoznaczny element o minimalnej normie $\widehat{A}(p)$ w zbiorze $A(p)$. Stąd wersja cádlág niemalejącej funkcji $\widehat{A}(\cdot)$ (ponownie oznaczanej przez $\widehat{A}$) jest selektorem multifunkcji A. Chcąc pokazać istnienie rozwiązania wymagane jest, aby funkcje występujące w tym równaniu były ograniczone i spełniały warunek Lipschitza. Niech

$$f^k(u) := \begin{cases} f(u), & u \in [-k, k] \\ f(k), & u > k \\ f(-k), & u < -k \end{cases}$$

i

$$\widehat{A}^k(u) := \begin{cases} \widehat{A}(u), & u \in [-k, k] \\ \widehat{A}(k), & u > k \\ \widehat{A}(-k), & u < -k \end{cases},$$

dla $k \geq 1$. W podobny sposób definiujemy funkcję g^k. Zauważmy, że na mocy Twierdzenia 4.6 funkcje f i g są wypukłe i spełniają lokalny warunek Lipschitza. Ponieważ funkcje f^k i g^k są stałe poza przedziałem $[-k,k]$, więc spełniają one globalny warunek Lipschitza. $f \in \mathcal{AD}$, więc jej pochodna posiada wersję cádlág. Oznaczmy przez f'^k następującą funkcję

$$f'^k(u) := \begin{cases} f'(u), & u \in [-k,k) \\ 0, & u < -k \text{ lub } u \geq k \end{cases}$$

Ponieważ pochodna f'^k na przedziale $[-k,k)$ pokrywa się z prawostronną pochodną funkcji f, więc f'^k też jest funkcją cádlág. Ponadto wypukłość funkcji f zapewnia, że jej prawostronna pochodna jest niemalejącą funkcją. Oznacza to, że f'^k jest niemalejącą i prawostronnie ciągłą funkcją na $[-k,k)$. Stąd i z faktu, że f'^k jest równa zero poza przedziałem $[-k,k)$ otrzymujemy, że f'^k jest globalnie ograniczoną funkcją. Udowodnimy, że dla każdego ustalonego $k \geq 1$ istnieje jednoznaczne minimalne mocne rozwiązanie $\underline{x}^k$ równania

$$\begin{aligned} x_t = \xi + \int_0^t f^k(x_s)dz_s + \frac{1}{2}\int_0^t f'^k(x_s)f^k(x_s)d[z,z]_s \\ + \int_0^t g^k(x_s)da_s - \int_0^t \widehat{A}^k(x_s)d[z,z]_s, \end{aligned} \tag{11}$$

które jest również rozwiązaniem równania

$$x_t = \xi + \int_0^t f^k(x_s)dz_s + \frac{1}{2}[f^k(x),z]_t$$

$$+ \int_0^t g^k(x_s)da_s - \int_0^t \widehat{A}^k(x_s)d[z,z]_s.$$

Ponieważ $z = m + v$ jest kanonicznym rozkładem ciągłego semimartyngału z na ciągły lokalny martyngał m i ciągły FV-proces v oraz na mocy Własności 1.12 (ii) i (iii) $\int_0^t \widehat{A}^k(x_s)d[z,z]_s = \int_0^t \widehat{A}^k(x_s)d[m,m]_s$, więc równanie (11) można zapisać w następujący sposób

$$x_t = \xi + \int_0^t f^k(x_s)dm_s + \int_0^t f^k(x_s)dv_s + \int_0^t g^k(x_s)da_s$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t f'^k(x_s)f^k(x_s)d[m,m]_s + \int_0^t -\widehat{A}^k(x_s)d[m,m]_s.$$

Ponieważ drugi i trzeci składnik powyższego równania mają podobne własności, to znaczy $\pm f^k$ i $\pm g^k$ są ograniczone i spełniają warunek Lipschitza oraz v i "a" są ciągłymi FV-procesami, to nasze rozważania możemy ograniczyć do następującego równania

$$\begin{aligned} x_t = \xi + \int_0^t f^k(x_s)dm_s + \frac{1}{2}\int_0^t f'^k(x_s)f^k(x_s)d[m,m]_s \\ + \int_0^t b^k(x_s)du_s + \int_0^t -\widehat{A}^k(x_s)d[m,m]_s, \end{aligned} \tag{12}$$

gdzie u jest ciągłym FV-procesem, a b^k są ograniczonymi funkcjami spełniającymi warunek Lipschitza. Mimo, że funkcje $f'^k \cdot f^k$ i $-\widehat{A}^k$ nie muszą spełniać warunku Lipschitza, pokażemy korzystając z Lematu 4.24 istnienie jednoznacznego rozwiązania równania (12). Ponieważ $f'^k \cdot f^k$ nie jest dolnie półciągła, definiujemy następującą wersję pochodnej f'^k

$$\widetilde{f'}^k(p) = \begin{cases} f'^k(p-) \wedge f'^k(p), & \text{jeśli } f^k(p) \geq 0 \\ f'^k(p-) \vee f'^k(p), & \text{jeśli } f^k(p) < 0. \end{cases}$$

Oznaczmy przez $\rho^k(p) = \frac{1}{2}f^k(p)\widetilde{f'}^k(p)$. Funkcja ρ^k jest dolnie półciągła i ponadto $\liminf_{q\to p}\rho^k(q) = \rho^k(p)$. Zauważmy, że niemalejąca funkcja cádlág $-\widehat{A}^k$ jest dolnie półciągła. Ponadto

$$\liminf_{q\to p}(-\widehat{A}^k(q)) = \lim_{q\downarrow p}(-\widehat{A}^k(q)) = (-\widehat{A}^k(p)).$$

KROK 2: Pokażemy, że równanie

$$\begin{aligned} x_t = \xi + \int_0^t f^k(x_s)dm_s + \frac{1}{2}\int_0^t \widetilde{f'}^k(x_s)f^k(x_s)d[m,m]_s \\ + \int_0^t b^k(x_s)du_s + \int_0^t -\widehat{A}^k(x_s)d[m,m]_s \end{aligned} \tag{13}$$

posiada jednoznaczne minimalne rozwiązanie. W tym celu zastosujemy metodę wykorzystaną przez J. San Martina w pracy [37]. Bez straty ogólności możemy założyć, że proces $[m,m]$ jest jednostajnie ograniczony przez pewną stałą C. Od tego warunku można uwolnić się poprzez zastosowanie metody lokalizacji. Rozważmy następujące funkcje

$$^{r}\rho^{k}(p) = inf_{q}\{\rho^{k}(q) + r|p-q|\} - 2^{-r}$$

$$^{r}b^{k}(p) = inf_{q}\{b^{k}(q) + r|p-q|\} - 2^{-r}$$

$$^{r}A^{k}(p) = inf_{q}\{(-\widehat{A}^{k}(q)) + r|p-q|\} - 2^{-r}.$$

Ponieważ funkcje f^k, b^k, i $-\widehat{A}^k$ są globalnie ograniczone, więc istnieje stała również oznaczana przez C, która jest ich wspólnym ograniczeniem. Wówczas $\rho^k \leq \frac{1}{2}C^2$. Z dolnej półciągłości tych funkcji oraz na mocy Lematu 4.24 otrzymujemy

1° $\forall p \in R \quad |^{r}\rho^{k}(p)| \leq C_1, \quad |^{r}b^{k}(p)| \leq C_1$ i $|^{r}A^{k}(p)| \leq C_1$, gdzie $C_1 = (\frac{1}{2}C^2 \vee C) + 1$.

2° $^{r}\rho^{k}(\cdot) \nearrow \rho_{k}(\cdot), \ ^{r}b^{k}(\cdot) \nearrow b_{k}(\cdot), \ ^{r}A^{k}(\cdot) \nearrow (-\widehat{A}^{k}(\cdot))$, przy $r \to \infty$.

3° $^{r}\rho^{k}$, $^{r}b^{k}$ i $^{r}A^{k}$ spełniają warunek Lipschitza ze stałą r.

4° $^{r}\rho^{k} <^{*} {}^{r+1}\rho^{k}, \ ^{r}b^{k} <^{*} {}^{r+1}b^{k}, \ ^{r}A^{k} <^{*} {}^{r+1}A^{k}$.

5° Jeśli ρ^k i $-\widehat{A}^k$ są ciągłe w pewnym punkcie p i $p^r \to p$, to $^{r}\rho^{k}(p^r) \to \rho^{k}(p)$ oraz $^{r}A^{k}(p^r) \to (-\widehat{A}^{k}(p))$, przy $r \to \infty$ i każdym $k = 1, 2, ...$

Dla każdego $r = 1, 2, ...$ rozważmy równanie

$$\begin{aligned} y_t = \xi &+ \int_0^t f^k(y_s)dm_s + \int_0^t \{^{r}b^{k}(y_s)\}du_s \\ &+ \int_0^t \{^{r}\rho^{k}(y_s)\}d[m,m]_s + \int_0^t \{^{r}A^{k}(y_s)\}d[m,m]_s. \end{aligned} \tag{14}$$

Ponieważ wszystkie współczynniki równania (14) spełniają warunek Lipschitza, więc równanie to ma jednoznaczne rozwiązanie $^{r}y^{k}_{t}$. Korzystając z Lematu 4.23 otrzymujemy, że ciąg rozwiązań równań (14) jest rosnący względem r dla każdego ustalonego k i $t \in [0,T]$ prawie na pewno.

Niech $\underline{x}_t^k = \lim_{r\to\infty}\{{}^r y_t^k\} \le \infty$. Zauważmy, że $\underline{x}_t^k < \infty$. Rzeczywiście, weźmy proces ${}^r z_t^k = {}^r y_t^k - \xi$, który dla każdego ustalonego $t \in [0,T]$ jest rosnący względem r. Wówczas korzystając z nierówności Doob'a oraz szacując poszczególne składniki równania (14) otrzymujemy

$$E(\sup_{t\in I}|\int_0^t f^k({}^r y_s^k)dm_s|^2) \le 4E(\int_0^T |f^k({}^r y_s^k)|^2 d[m,m]_s) \le 4C^3$$

$$E(\sup_{t\in I}|\int_0^t \{{}^r\rho^k({}^r y_s^k)\}d[m,m]_s|^2) \le (C_1)^2C^2,$$

$$E(\sup_{t\in I}|\int_0^t \{{}^r A^k({}^r y_s^k)\}d[m,m]_s|^2) \le (C_1)^2C^2$$

$$E(\sup_{t\in I}|\int_0^t \{{}^r b^k({}^r y_s^k)\}da_s|^2) \le (C_1)^2|u_T - u_0|^2 \le (C_1)^2C^2.$$

Ponadto,

$$E(\sup_{t\in I}|{}^r z_t^k|^2) = E(\sup_{t\in[0,T]}|\int_0^t f^k({}^r y_s^k)dm_s + \int_0^t \{{}^r b^k({}^r y_s^k)\}du_s$$

$$+\int_0^t \{{}^r\rho^k({}^r y_s^k)\}d[m,m]_s + \int_0^t \{{}^r A^k({}^r y_s^k)\}d[m,m]_s|^2) \le C_2$$

gdzie $C_2 = 4(4C^3 + 3(C_1)^2C^2)$ nie zależy od r. Korzystając z Twierdzenia 4.21 mamy

$$\lim_{r\to\infty} E(\sup_{t\in I}|{}^r z_t^k|^2) = E(\sup_{t\in I}[(\underline{x}_t^k - \xi)\vee 0]^2) \le C_2 < \infty.$$

Stąd $\underline{x}_t^k$ jest skończone prawie na pewno dla wszystkich $t \in [0,T]$.

Chcąc pokazać, że $\underline{x}_t^k$ jest rozwiązaniem równania (13) musimy udowodnić, że dla każdego ustalonego k

(a) $\int_0^t f^k({}^r y_s^k)dm_s \to \int_0^t f^k(\underline{x}_s^k)dm_s$

(b) $\int_0^t \{{}^r b^k({}^r y_s^k)\}du_s \to \int_0^t b^k(\underline{x}_s^k)du_s$

(c) $\int_0^t \{{}^r\rho^k({}^r y_s^k)\}d[m,m]_s \to \int_0^t \rho^k(\underline{x}_s^k)d[m,m]_s$

(d) $\int_0^t \{{}^r A^k({}^r y_s^k)\}d[m,m]_s \to \int_0^t \{-\widehat{A}^k(\underline{x}_s^k)\}d[m,m]_s,$

gdzie zbieżność jest w sensie ucp, przy $r \to \infty$. Ponieważ f^k jest jednostajnie ciągłą funkcją oraz dla każdego ustalonego $t \in [0,T]$ ${}^r y^k_t \to \underline{x}^k_t$, więc na mocy własności 5° z Lematu 4.24 otrzymujemy, że $f^k({}^r y^k_s) \to f^k(\underline{x}^k_s)$, przy $r \to \infty$. Ponownie korzystając z nierówności Doob'a mamy

$$E(\sup_{t\in I} |\int_0^t f^k({}^r y^k_s) dm_s - \int_0^t f^k(\underline{x}^k_s) dm_s|^2)$$

$$\leq 4E \int_0^T |f^k({}^r y^k_s) - f^k(\underline{x}^k_s)|^2 d[m,m]_s \to_{r\to\infty} 0.$$

Stąd dla pewnego podciągu ciągu $({}^r y^k_s)_{r\geq 1}$, ponownie oznaczanego przez $({}^r y^k_s)_{r\geq 1}$, otrzymujemy

$$\sup_{t\in I} |\int_0^t f^k({}^r y^k_s) dm_s - \int_0^t f^k(\underline{x}^k_s) dm_s| \to_{r\to\infty} 0 \;\; p.n.$$

W podobny sposób pokazujemy

$$\sup_{t\in I} |\int_0^t [{}^r b^k({}^r y^k_s) - b^k(\underline{x}^k_s)] du_s| \to_{r\to\infty} 0.$$

Pozostało nam jeszcze udowodnić zbieżności (c) i (d). Musimy więc pokazać, że

$$\begin{aligned} {}^r\rho^k({}^r y^k_s) &\to_{r\to\infty} \rho^k(\underline{x}^k_s) \\ {}^r A^k({}^r y^k_s) &\to_{r\to\infty} (-\widehat{A}^k(\underline{x}^k_s)) \end{aligned} \tag{15}$$

praiwe wszędzie względem losowej miary ν skojarzonej z procesem $[m,m]$ przy każdym ustalonym k. Powyższa zbieżność jest oczywista tylko w punktach ciągłości odpowiednio funkcji ρ^k i $-\widehat{A}^k$. Oznaczmy przez

$${}^r y^k_t = \xi + \int_0^t f^k({}^r y^k_s) dm_s + \int_0^t \{{}^r b^k({}^r y^k_s)\} du_s$$

$$+ \int_0^t \{{}^r \rho^k({}^r y^k_s) +^r A^k({}^r y^k_s)\} d[m,m]_s = \xi + S^r_1 + S^r_2 + S^r_3$$

Ponieważ ciągi ${}^r y^k$, S_1^r i S_2^r są zbieżne, więc ciąg S_3^r też musi być zbieżny. Oznaczmy przez l_t granicę ciągu S_3^r. Dla $t < t'$ otrzymujemy

$$|l_t - l_{t'}| \le \lim_{r\to\infty}(\int_t^{t'} (\mid {}^r\rho^k({}^r y_s^k) \mid + \mid {}^r A^k({}^r y_s^k) \mid) d[m,m]_s)$$

$$\le 2C_1 \mid [m,m]_t - [m,m]_{t'} \mid .$$

Zatem l_t jest procesem ciągłym i ma trajektorie o wahaniu ograniczonym. Pokazaliśmy, że

$$\underline{x}_t^k = \xi + \int_0^t f^k(\underline{x}_s^k) dm_s + \int_0^t b^k(\underline{x}_s^k) du_s + l_t \tag{16}$$

Stąd $\underline{x}_t^k$ jest ciągłym semimartyngałem. Korzystając z ciągłości ${}^r y_t^k$ i $\underline{x}_t^k$ oraz z faktu, że ${}^r y_t^k$ jest rosnący względem r oraz zbieżny do $\underline{x}_t^k$ dla każdego ustalonego t, otrzymujemy na mocy Twierdzenia Dini'ego, że dla każdego ω, ${}^r y_t^k \to_{r\to\infty} \underline{x}_t^k$ jednostajnie na zbiorach zwartych. Oznaczmy przez D_1 zbiór punktów, w których funkcja ρ^k jest nieciągła. Niech $\mu = \nu(s)$ oznacza miarę na $[0,T]$ generowaną przez ν. Zauważmy, że $\mu(D_1) = 0$ ponieważ D_1 pokrywa się ze zbiorem punktów nieciągłości funkcji cádlág f'^k. Niech D_2 oznacza zbiór punktów nieciągłości funkcji $\widehat{A}^k$. Z monotoniczności funkcji $\widehat{A}^k$ na $[-k,k]$ oraz z faktu, że poza tym przedziałem funkcja ta jest stała wnioskujemy, że $\mu(D_2) = 0$. Niech $D = D_1 \cup D_2$. Dla $\alpha > 0$ zdefiniujmy następujące zbiory

$$D^\alpha = \{p : \ (\ \rho^k(p) \ \text{lub} \ \widehat{A}^k(p) \ \text{jest nieciągłe} \ ) \ \text{oraz} \ |f^k(p)| \ge \alpha > 0\}.$$

Zauważmy, że $D = \bigcup_{\alpha>0} D^\alpha$ jest zbiorem punktów nieciągłości funkcji ρ^k lub $\widehat{A}^k$, dla których $f^k \ne 0$. Ponieważ $D^\alpha \subset D$, to $\mu(D^\alpha) = 0$. W celu udowodnienia warunku (15) pokażemy, że $P\{\omega : \ \mu\{s : \ \underline{x}_s^k \in D\} = 0\} = 1$. Niech

$$I = E(\int_0^t 1_{D^\alpha}(\underline{x}_s^k) d[m,m]_s)$$

$$\le E(\int_0^t 1_{D^\alpha}(\underline{x}_s^k) \alpha^{-2} (f^k(\underline{x}_s^k))^2 d[m,m]_s).$$

Z własności procesu wahania kwadratowego, na mocy Twierdzenia 1.14 otrzymujemy

$$[\underline{x}^k, m]_s = [\xi + \int f^k(\underline{x}^k_q)dm_q + \int b^k(\underline{x}^k_q)du_q + l, m]_s$$
$$= [\int f^k(\underline{x}^k_q)dm_q, m]_s = \int_0^s f^k(\underline{x}^k_q)d[m,m]_q.$$

Stąd $d[\underline{x}^k, m]_s = f^k(\underline{x}^k_s)d[m,m]_s$. Wtedy

$$I \leq \alpha^{-2}E(\sup_{t\in I}\int_0^t 1_{D^\alpha}(\underline{x}^k_s)f^k(\underline{x}^k_s)d[\underline{x}^k, m]_s),$$

gdzie 1_A oznacza funkcję charakterystyczną zbioru A.

Korzystając z nierówności Kunity-Watanabe (Twierdzenie 1.13) mamy

$$I \leq \alpha^{-2}E((\int_0^T d[m,m]_s)^{\frac{1}{2}}(\int_0^T 1_{D^\alpha}(\underline{x}^k_s)(f^k(\underline{x}^k_s)^2 d[\underline{x}^k, \underline{x}^k]_s)^{\frac{1}{2}})$$
$$\leq C^{\frac{1}{2}}\alpha^{-2}E(\int_0^T 1_{D^\alpha}(\underline{x}^k_s)(f^k(\underline{x}^k_s))^2 d[\underline{x}^k, \underline{x}^k]_s)^{\frac{1}{2}}.$$

Stosując Twiedzenie 1.17 (iii) dostajemy

$$I \leq C^{\frac{1}{2}}\alpha^{-2}E(\int_R\int_0^T 1_{D^\alpha}(q)(f^k(q)^2 L(q,ds)dq)^{\frac{1}{2}},$$

gdzie $L(q,s) = L^q_s(\underline{x}^k)$ jest lokalnym czasem procesu $\underline{x}^k$ określonym w Definicji 1.16. Wówczas z globalnej ograniczoności funkcji f^k otrzymujemy

$$I \leq C^{\frac{3}{2}}\alpha^{-2}E(\int_R\int_0^T 1_{D^\alpha}(q)L(q,ds)dq)^{\frac{1}{2}} \leq C^{\frac{3}{2}}\alpha^{-2}E(\int_R\int_0^T 1_D(q)L(q,ds)dq)^{\frac{1}{2}}.$$

Ponieważ $\mu(D) = 0$, więc

$$\int_R\int_0^T 1_D(q)L(q,ds)dq = 0 \;\; p.n.$$

Zatem $I = 0$ prawie wszędzie. W szczególności

$P\{\omega : \;\; \mu\{s : \underline{x}^k_s \in D^\alpha\} = 0\} = 1$. Stąd $P\{\omega : \;\; \mu\{s : \underline{x}^k_s \in D\} = 0\} = 1$. Oznaczmy przez D^c dopełnienie zbioru D. Z ciągłości funkcji ρ^k i $-\widehat{A}^k$ na D^c wynika, że istnieje taki zbiór $B \in \mathcal{F}$, $P(B) = 1$, że dla każdego $\omega \in B$

$${}^r\rho^k({}^r y^k_s) \rightarrow_{r\to\infty} \rho^k(\underline{x}^k_s) \quad d\mu(s)\; p.w.$$

i

$$ {}^rA^k({}^ry^k_s) \to_{r\to\infty} (-\widehat{A}^k(\underline{x}^k_s)) \quad d\mu(s)\ p.w. $$

Wówczas z Twierdzenia 4.21 otrzymujemy zbieżność całek

$$ \int_0^t \{{}^r\rho^k({}^ry_s)\}d[m,m]_s \to \int_0^t \rho^k(\underline{x}^k_s)d[m,m]_s $$

$$ \int_0^t \{{}^rA^k({}^ry_s)\}d[m,m]_s \to \int_0^t \{-\widehat{A}^k(\underline{x}^k_s)\}d[m,m]_s. $$

Pokazaliśmy więc, że $\underline{x}^k$ jest rozwiązaniem równania (13).

KROK 3: Pokażemy, że $\underline{x}^k$ jest jednoznacznym minimalnym rozwiązaniem równania (12). Zauważmy, że

$$ J_t = |\int_0^t f^k(\underline{x}^k_s)\widetilde{f}'^k(\underline{x}^k_s) - f^k(\underline{x}^k_s)f'^k(\underline{x}^k_s)d[m,m]_s| = 0\ \ p.n. $$

Rzeczywiście, w podobny sposób jak w kroku 2 otrzymujemy

$$ J_t = |\int_0^t \widetilde{f}'^k(\underline{x}^k_s) - f'^k(\underline{x}^k_s)d[\underline{x}^k, m]_s| $$

$$ \leq (\int_0^t d[m,m]_s)^{\frac{1}{2}}(\int_0^t (\widetilde{f}'^k(\underline{x}^k_s) - f'^k(\underline{x}^k_s))^2 d[\underline{x}^k, \underline{x}^k]_s)^{\frac{1}{2}}. $$

Korzystając ponownie z Twiedzenia 1.17 (iii) uzyskujemy

$$ J_t \leq ([m,m]_t)^{\frac{1}{2}}(\int_R \int_0^t 1_D(q)|\widetilde{f}'^k(q) - f'^k(q)|^2 L(q,ds)dq)^{\frac{1}{2}} $$

$$ \leq 2C([m,m]_t)^{\frac{1}{2}}(\int_R \int_0^t 1_D(q)L(q,ds)dq)^{\frac{1}{2}} = 0\ \ p.n. $$

Stąd $\underline{x}^k$ jest rozwiązaniem równania (12), które jest tylko inną formą zapisu równania (11). Pokażemy teraz, że $\underline{x}^k$ jest jednoznacznym minimalnym rozwiązaniem równania (12). Niech y^k będzie dowolnym różnym od $\underline{x}^k$ rozwiązaniem równania (12). Wtedy y^k jest również rozwiązaniem równania (13). Ponieważ dla każdego $t \in [0,T]$, na mocy Lematu 4.24, ${}^ry^k_t \leq y^k_t$ wnioskujemy, że $\underline{x}^k_t = \lim_{r\to\infty}\{{}^ry^k\} \leq y^k_t$ dla każdego $t \in [0,T]$. Stąd $\underline{x}^k$ jest jednoznacznym rozwiązaniem minimalnym równania (12).

KROK 4: Pokażemy, że $\underline{x} = \lim_{k\to\infty} \underline{x}^k$ jest rozwiązaniem równania

$$\begin{aligned} x_t &= \xi + \int_0^t f(x_s)dz_s + \int_0^t g(x_s)da_s \\ &+\frac{1}{2}[f(x), z]_t + \int_0^t -\widehat{A}(x_s)d[m,m]_s, \end{aligned} \tag{17}$$

Zdefiniujmy czasy zatrzymania $S^k := inf\{t \in [0,T] : \ |\underline{x}_t^k| > k\}$.
Wtedy rozwiązania $\underline{x}^k$ i $\underline{x}^{k+1}$ spełniają równania

$$\underline{x}^k_{t\wedge S^k} = \xi + \int_0^{t\wedge S^k} f^k(\underline{x}^k_s)dz_s + \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge S^k} f^k(\underline{x}^k_s)f'^k(\underline{x}^k_s)d[m,m]_s$$
$$+\int_0^{t\wedge S^k} g^k(\underline{x}^k_s)da_s - \int_0^{t\wedge S^k} \widehat{A}^k(\underline{x}^k_s)d[m,m]_s$$

oraz

$$\underline{x}^{k+1}_{t\wedge S^{k+1}} = \xi + \int_0^{t\wedge S^{k+1}} f^{k+1}(\underline{x}^{k+1}_s)dz_s$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^{t\wedge S^{k+1}} f^{k+1}(\underline{x}^{k+1}_s)f'^{k+1}(\underline{x}^{k+1}_s)d[m,m]_s + \int_0^{t\wedge S^{k+1}} g^{k+1}(\underline{x}^{k+1}_s)da_s$$
$$-\int_0^{t\wedge S^{k+1}} \widehat{A}^{k+1}(\underline{x}^{k+1}_s)d[m,m]_s.$$

Zauważmy, że $f(u) = f^k(u) = f^{k+1}(u)$ dla $|u| \le k$ i $k = 1, 2, ...$ Podobną własność mamy także dla funkcji $g, \ g^k, \ g^{k+1}, \ \widehat{A}, \ \widehat{A}^k, \ \widehat{A}^{k+1},$ oraz iloczynów $f'f, \ f'^k f^k, \ f'^{k+1}f^{k+1}$. Z faktu, że $|\underline{x}^k_{t\wedge S^k}| \le k$ wynika równość

$$\underline{x}^k_{t\wedge S^k} = \xi + \int_0^{t\wedge S^k} f(\underline{x}^k_s)dz_s + \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge S^k} f(\underline{x}^k_s)f'(\underline{x}^k_s)d[m,m]_s$$
$$+\int_0^{t\wedge S^k} g(\underline{x}^k_s)da_s - \int_0^{t\wedge S^k} \widehat{A}(\underline{x}^k_s)d[m,m]_s$$
$$= \xi + \int_0^{t\wedge S^k} f^{k+1}(\underline{x}^k_s)dz_s + \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge S^k} f^{k+1}(\underline{x}^k_s)f'^{k+1}(\underline{x}^k_s)d[m,m]_s$$
$$+\int_0^{t\wedge S^k} g^{k+1}(\underline{x}^k_s)da_s - \int_0^{t\wedge S^k} \widehat{A}^{k+1}(\underline{x}^k_s)d[m,m]_s.$$

Z jednoznaczności minimalnego mocnego rozwiązania otrzymujemy $\underline{x}^k = \underline{x}^{k+1}$ on $[0, S^k]$. Ponadto $S^k < S^{k+1}$ na $\{S^k < T\}$. Ponieważ ciąg czasów zatrzymania jest rosnący, można zdefiniować przewidywalny czas zatrzymania $S := \lim_{k\to\infty} S^k$ i taki proces $\underline{x}$ na przedziale $[0,S]$, że $\underline{x} = \underline{x}^k$ na $[0,S^k]$. Proces $\underline{x}$ spełnia równanie (11) na $[0,S^k]$ dla $k = 1,2,...$, stąd $\underline{x}$ spełnia również równanie (16) na $[0,S)$. Czas zatrzymania S jest czasem eksplozji rozwiązania. Ponieważ f, g i $\widehat{A}$ są selektorami odpowiednich multifunkcji F,G i A, wnioskujemy, że $f \bullet \underline{x}$, $g \bullet \underline{x}$ oraz $\widehat{A} \bullet \underline{x}$ są selektorami z Definicji 4.19. Oznacza to, że $\underline{x}$ jest rozwiązaniem inkluzji (SII).

$\blacksquare$

Uwaga 4.26 Przy założeniach Twierdzenia 4.25 może również zdarzyć się, że $P(S > T) = 1$. Wtedy proces x jest rozwiązaniem na całym przedziale $[0,T]$.

Lista najczęściej używanych symboli

$\widehat{A}(\cdot)$	element o minimalnej normie ze zbioru $A(\cdot)$	40
$\mathcal{AD}$	przestrzeń funkcji absolutnie ciągłych, których pochodne posiadają wersję cádlág	32
$B \div C$	różnica Hukuhary zbiorów B i C	13
$Cl(R^1)$	rodzina wszystkich niepustych i domkniętych podzbiorów R^1	10
$CComp(R^1)$	rodzina wszystkich niepustych, domkniętych i zwartych podzbiorów R^1	10
$Conv(R^1)$	rodzina wszystkich niepustych, domkniętych i wypukłych podzbiorów R^1	10
$\mathcal{D}$	przestrzeń funkcji prawostronnie ciągłych ze skończonymi lewostronnymi granicami	32
$DF(\cdot)$	pochodna Hukuhary z multifunkcji F	13
$dist(b, C)$	odległość punktu $b \in B$ od zbioru C	11
FV-proces	adaptowalny proces cádlág z trajektoriami o wahaniu ograniczonym	6
$H(B, C)$	odległość Hausdorffa zbiorów B i C	10
$\overline{H}(B, C)$	półmetryka Hausdorffa	11
$\mathcal{H}^2$	przestrzeń Banacha semimartyngałów z $\vert\vert x\vert\vert_{\mathcal{H}^2}$	9
$\mathcal{L}^2$	przestrzeń procesów stochastycznych całkowalnych z kwadratem	5
$L_T^p(x)$	lokalny czas procesu x	9
$\mathcal{P}$	σ-algebra przewidywalna	5
$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_s)_{s\in I}, P)$	zupełna przestrzeń probabilistyczna z filtracją $(\mathcal{F}_s)_{s\in I}$	5
$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_s^W)_{s\in I}, P)$	zupełna przestrzeń probabilistyczna z naturalną filtracją $(\mathcal{F}_s^W)_{s\in I}$ generowaną przez proces Wienera	34
S^p	przestrzeń Banacha adaptowalnych procesów cádlág z $\vert\vert x\vert\vert_{S^p}$	6
$W = (W_s)_{s\in I}$	proces Wienera	6
$[\cdot, \cdot]$	proces wahania kwadratowego	8

References

[1] Ahmed N.U., (1994), *Nonlinear stochastic differential inclusions on Banach space,* Stoch. Anal. Appl. 12(1), 1-10.

[2] Aubin J.P., (1997), Dynamic Economic Theory. A viability Approach, Springer, Verlag, Berlin.

[3] Aubin J.P., Cellina A., (1984), Differential Inclusions, Noordhoff, Leyden.

[4] Aubin J.P., Da Prato G., (1998), *The viability theorem for stochastic differential inclusions,* Stoch, Anal. Appl. 16, 1-14.

[5] Banks H.T., Jacobs M.Q., (1970), *A differential calculus for set-valued function,* J. Math. Anal. Appl. 29, 246-272.

[6] Barlow M.T., Perkins E., (1984), *One-dimensional stochastic differential equations involving a singular increasing process,* Stochastics, 12, 229–249.

[7] Da Prato G., Zabczyk J., (1992), Stochastic Equations in Infinite Dimensions, Cambridge Univ. Press.

[8] Dawidowicz A.L., Twardowska K., (1996), *A relation between the Stratonovich and Itô equations, with integrands of delayed argument.,* Tatra Mt. Math. Publ. 7, 269-274.

[9] Filippov A.F., (1962), *On certain questions in the theory of optimal control,* SIAM J. Control, 1,76-84.

[10] Gihman I.I., (1950), *On the theory of differential equations of random processes,* Ukrain. Mat. Z. 2(4), 37-63.

[11] Gihman I.I., Skorohod A.V., (1972), Stochastic Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin.

[12] Góralczyk A., Motyl J. (2006), *Set valued Stratonovich integral,* Discuss. Math. Probab. Stat. 26, no. 1, 63-81.

[13] Góralczyk A., Motyl J., *Stratonovich stochastic inclusion,* Dynamic Systems and Applications 2009 (w druku)

[14] Hiai F., Umegaki H., (1977), *Integrals, conditional expectations, and martingales of multivalued functions,* J. Multivar. Anal. 7, 149-182.

[15] Ikeda N., Watanabe S., (1981), Stochastic Differential Equations and Diffusion, North-Holand, Amsterdam.

[16] Itô K., (1946), *On stochastic integral equation,* Proc. Imp. Acad. Tokyo 22, 32-35.

[17] Itô K., (1951), *On stochastic differential equations,* Mem. Amer. Math. Soc. 4, 1-51.

[18] Karatzas I., Shreve S.E., (1988), Brownian Motion and Stochastic Calculus, Springer, Verlag, New York

[19] Kisielewicz M., (1991), Differential Inclusions and Optimal Control, PWN, Warszawa, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht/Boston/London

[20] Kisielewicz M., (1997), *Set-valued stochastic integrals and stochastic inclusions,* Stoch. Anal. Appl. 15(5), 783-800.

[21] Kisielewicz M., (1993), *Properties of solution set of stochastic inclusions,* J. Appl. Math. Anal. 6, 217-236.

[22] Kisielewicz M., Michta M., Motyl J., (2003), *Set Valued Approach to Stochastic Control,* Dynamic Systems and Applications 12, 405-433, 434-466.

[23] Kurtz T.G., Pardoux E., Protter P., (1995), *Stratonovich stochastic differential equations driven by general semimartingales,* Ann. Inst. Henri Poincaré Vol.31, No 2, 351-377.

[24] Lakshmikhantam V., Gnana Bhaskar T., Vasundhara Devi, (2004), Theory of Set Differential Equations in Metric Space, (preprint).

[25] Marchaud H., (1938), *Sur les chapms de demi-cônes et les équations différentielles du premier ordre,* Bull. Sc. and Math. 62, 1-38.

[26] Meyer P.A., (1976) *Un cours sur les intégrales stochastiques,* Séminaire de Probabilités X, Lecture Notes in Math. 511, 246–400, Springer, Berlin.

[27] Michta M., (2002), *Optimal solutions to stochastic differential inclusions,* Applicationes Math. 29(4), 387-398.

[28] Motyl J., (1998), *Stochastic functional inclusion driven by semimartingale,* Stoch. Anal. Appl. 16(3), 517-532

[29] Michta M., Motyl J., (2007), *Differentiable selections of multifunctions and their applications,* Nonlinear Anal. 66, no. 2, 536-545.

[30] Michta M., Motyl J., (2007), *Set valued Stratonovich integral and Stratonovich type stochastic inclusion,* Dynam. Systems Appl. 16, no. 1, 141-154.

[31] Nowak A., Twardowska K., (2004), *On the relation between the Itô and Stratonovich integrals in Hilbert spaces,* Ann. Math. Sil. No. 18, 49-63.

[32] ∅ksendal B., (1995), Stochastic Differential Equations, an Introduction with Applications, Springer Verlag Berlin-Heidelberg.

[33] Olech C., (1975), *Existence of solutions of non convex orientor fields,* Stoch. Anal. Appl. 15(5), 783-800.

[34] Pettersson R., (1994), *Yosida approximations for multivalued stochastic differential equations,* Stochastics Stochastics Rep. 52, 107-120.

[35] Phelps R.R., (1989) Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

[36] Protter P., (1990), Stochastic Integration and Differential Equations: A New Approach, Springer, New York.

[37] San Martin J., (1993), *One-dimensional Stratonovich differential equations,* Ann. Probab., 21(1), 509–533.

[38] Słomiński L., (1996), *Stability of stochastic differential equations driven by general semimartingales,* Dissertationes Math. 349, 1-113.

[39] Twardowska K., (1993), *Approximation theorems of Wong-Zakai type for stochastic differential equations in infinite dimensions,* Dissertationes Math. 325, 1-54.

[40] Ważewski T., (1961), *Sur une condition équivalente á l' équation au contingent,* Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. 9, 865-867.

[41] Wong E., Zakai M., (1965), *On the convergence of ordinary integrals to stochastic integrals,* Ann. Math. Stat. 36, 1560-1564.

[42] Zaremba E., (1936), *Sur les équations au paratingent,* Bull. Sc. Math., 60, 139-160.